

المملكة المغربية
ROYAUME DU MAROC



Ministère de l'Enseignement Supérieur de la Recherche
Scientifique de la Formation des Cadres

Présidence du Concours National Commun
Ecole Hassania des Travaux Publics



CONCOURS NATIONAL COMMUN
d'admission aux Établissements de Formation d'Ingénieurs et
Établissements Assimilés
Session 2013

ÉPREUVE DES MATHÉMATIQUES I

Filière MP

Durée 4 heures

Cette épreuve comporte 5 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est interdit

page de garde

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours MP,
comporte 5 pages.

L'usage de la calculatrice est interdit.

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les **références** des questions abordées.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Quelques aspects de la transformée de Laplace

Ce problème est composée de quatre parties. La deuxième partie utilise essentiellement le résultat de la question 1.2.3. de la première partie. La troisième partie est largement indépendante de la seconde et la quatrième fait appel à la troisième ainsi qu'au lemme de Littlewood faisant l'objet de la section 1.3. et le théorème de Césaro établi à la section 2.5. ; ces deux résultats n'interviennent que dans la quatrième partie.

Dans ce problème $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ désigne l'espace vectoriel des applications continues de I dans $\mathbb{K}$ et $\mathcal{C}^p(I, \mathbb{K})$ désigne l'espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^p$ de I dans $\mathbb{K}$, $p \geq 1$.

Si $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{K})$, on rappelle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$ est dite convergente lorsque la fonction $x \mapsto \int_0^x \varphi(t) dt$ possède une limite dans $\mathbb{K}$ lorsque x tend vers $+\infty$; on note alors $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$ la valeur de cette limite.

On rappelle aussi que $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$ peut converger sans que la fonction φ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Toute fois, pour les fonctions positives, il y'a équivalence entre l'intégrabilité de la fonction sur un intervalle et la convergence de son intégrale sur cet intervalle.

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$; pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt$ converge, on note $L(f)(z)$ la valeur de cette intégrale. La fonction $L(f)$ ainsi définie est appelée la transformée de Laplace de f .

Pour mener à bien cette épreuve, les candidats sont invités à manipuler les inégalités avec la plus grande vigilance surtout quand les objets concernés sont des nombres complexes.

1^{ère} partie

Résultats préliminaires

1.1. Soit $z \in \mathbb{C}$; on note x sa partie réelle et y sa partie imaginaire : $x = \operatorname{Re}(z)$ et $y = \operatorname{Im}(z)$.

1.1.1. Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-zt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si, et seulement si, $\operatorname{Re}(z) > 0$.

1.1.2. Montrer que si γ est un réel non nul, alors la fonction $t \mapsto \cos(\gamma t)$ n'admet pas de limite en $+\infty$. En déduire que la fonction $t \mapsto e^{-iyt}$ possède une limite dans $\mathbb{C}$ lorsque t tend vers $+\infty$ si, et seulement si, $y = 0$.

1.1.3. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-zt} dt$ converge si, et seulement si, $\operatorname{Re}(z) > 0$.

1.2. Soient $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ et $z_0 \in \mathbb{C}$ tels que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-z_0 t} f(t) dt$ soit convergente, et soit z un complexe tel que $\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(z_0)$; on désigne par F la fonction définie par

$$F(x) = \int_0^x e^{-z_0 t} f(t) dt, \quad x \geq 0.$$

1.2.1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et bornée sur $\mathbb{R}^+$.

1.2.2. Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-(z-z_0)t} F(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

1.2.3. À l'aide d'une intégration par partie, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt = (z - z_0) \int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} F(t) dt.$$

1.3. **Un lemme de Littlewood :** Soit $\psi \in \mathcal{C}^2(]0, +\infty[, \mathbb{C})$ une fonction de limite nulle en 0^+ telle que la fonction $x \mapsto x^2 \psi''(x)$ soit bornée sur $]0, +\infty[$. On prolonge ψ par continuité en 0 en posant $\psi(0) = 0$, et on note

$$M = \sup_{t>0} |t^2 \psi''(t)|.$$

1.3.1. Montrer, pour tout $x > 0$ et tout $\alpha \in]0, 1[$, la formule

$$\psi(\alpha x) - \psi(x) = (\alpha - 1)x\psi'(x) + \int_x^{\alpha x} (\alpha x - t)\psi''(t) dt.$$

1.3.2. En déduire, pour tout $x > 0$ et tout $\alpha \in]0, 1[$, l'inégalité

$$|x\psi'(x)| \leq \frac{2}{1-\alpha} \sup_{0 \leq t \leq x} |\psi(t)| + \frac{1-\alpha}{2\alpha^2} M.$$

1.3.3. Montrer alors que la fonction $x \mapsto x\psi'(x)$ est de limite nulle en 0^+ .

2^{ème} partie

Exemples et propriétés de la transformée de Laplace

2.1. Ici $f_\lambda \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ désigne la fonction $t \mapsto e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Préciser le domaine de définition de $L(f_\lambda)$ et donner l'expression de $L(f_\lambda)(z)$ lorsque cette quantité est définie.

2.2. Abscisse de convergence

Montrer que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$, il existe un unique $\sigma \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tel que $L(f)(z)$ soit défini si $\operatorname{Re}(z) > \sigma$ et ne le soit pas si $\operatorname{Re}(z) < \sigma$. Si le domaine de définition de $L(f)$ n'est pas vide, on pourra considérer la borne inférieure dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ de $\{\operatorname{Re}(z) ; L(f)(z) \text{ existe}\}$. σ est appelé l'abscisse de convergence de $L(f)$ et est noté $\sigma(f)$.

2.3. Quelques propriétés

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ une fonction telle que $\sigma(f) < +\infty$. D'après ce qui précède, la transformée de Laplace $L(f)$ est définie sur le demi plan ouvert $\Pi(\sigma(f)) = \{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re}(z) > \sigma(f)\}$ du plan complexe, donc aussi sur l'intervalle ouvert $]\sigma(f), +\infty[$.

Dans la suite du problème, on note aussi $L(f)$ la restriction à l'intervalle $]\sigma(f), +\infty[$ de la transformée de Laplace de f .

Dans les questions qui suivent, on pourra utiliser avec profit le résultat de la question 1.2.3. ci-dessus et exploiter au mieux les propriétés de la fonction F définie en 1.2.

2.3.1. Montrer que l'application $L(f)$ est continue sur le demi plan $\Pi(\sigma(f))$.

2.3.2. On pose $\Omega_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x > \sigma(f)\}$; il s'agit d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel on définit l'application notée L_f par :

$$L_f(x, y) = L(f)(x + iy), (x, y) \in \Omega(\sigma(f)).$$

Montrer que l'application L_f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω_f et que

$$\frac{\partial L_f}{\partial x}(x, y) = - \int_0^{+\infty} t e^{-t(x+iy)} f(t) dt, \quad (x, y) \in \Omega_f.$$

2.3.3. Montrer que la restriction à l'intervalle $]\sigma(f), +\infty[$ de la transformée de Laplace de f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et donner, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, une expression intégrale de la dérivée d'ordre p de $L(f)$, notée $L(f)^{(p)}$. On pourra raisonner par récurrence sur p .

2.3.4. Montrer que l'application $x \mapsto L(f)(x)$, définie sur l'intervalle $]\sigma(f), +\infty[$, admet une limite nulle en $+\infty$.

2.4. Soit w la fonction définie par : $w(t) = \frac{1 - \cos t}{t^2}$, $t > 0$; on la prolonge par continuité en 0.

2.4.1. Préciser la valeur en 0 de la fonction et montrer que $\sigma(w) \leq 0$.

2.4.2. Pour tout $x > 0$, calculer la dérivée seconde de l'application $x \mapsto L(w)(x)$ définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

2.4.3. En déduire, pour tout $x > 0$, l'expression de $(L(w))'(x)$ puis celle de $L(w)(x)$ à l'aide de fonctions usuelles. On pourra utiliser la question 2.3.4. pour calculer les constantes d'intégration.

2.5. Un théorème de Césaro : Soit $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ une fonction à valeurs positives telle que $\sigma(g) \leq 0$; on suppose de plus que la fonction $x \mapsto xL(g)(x)$ admet 1 comme limite en 0^+ .

2.5.1. Montrer que, pour tout $x > 0$ et toute fonction h continue par morceaux sur $[0, 1]$ et à valeurs réelles, la fonction $t \mapsto e^{-xt}g(t)h(e^{-xt})$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. On pose alors

$$\Delta_x(h) = x \int_0^{+\infty} e^{-xt}g(t)h(e^{-xt}) dt.$$

2.5.2. Si P est un polynôme à coefficients réels, on désigne également par P la restriction au segment $[0, 1]$ de la fonction polynomiale associée. Montrer que $\Delta_x(P)$ tend vers $\int_0^1 P(t) dt$ lorsque x tend vers 0^+ . On pourra exploiter la linéarité de Δ_x .

2.5.3. En donnant un énoncé précis du théorème utilisé, établir que la propriété précédente s'étend aux fonctions continues sur $[0, 1]$ et à valeurs réelles.

2.5.4. On admet ici que le résultat de la question précédente s'étend aux fonctions continues par morceaux sur $[0, 1]$ et à valeurs réelles, et on considère la fonction h_1 définie sur $[0, 1]$ par :

$$h_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < \frac{1}{e}, \\ \frac{1}{t} & \text{si } \frac{1}{e} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Pour tout $x > 0$, exprimer l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{x}} g(t) dt$ en fonction de x et de $\Delta_x(h_1)$ puis en déduire que la fonction $a \mapsto \frac{1}{a} \int_0^a g(t) dt$, définie sur $]0, +\infty[$, tend vers 1 lorsque a tend vers $+\infty$.

3^{ème} partie

Comportement au voisinage de l'origine

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$; on s'intéresse dans cette partie à l'étude du comportement au voisinage de 0^+ de la transformée de Laplace $L(f)$ en rapport avec l'existence de $L(f)(0)$.

3.1. Dans cette question on suppose que $L(f)(0)$ existe, ce qui est équivalent à la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$; on en déduit que $\sigma(f) \leq 0$.

3.1.1. Montrer que, pour tout $x > 0$, $L(f)(x) - L(f)(0) = x \int_0^{+\infty} (F(t) - L(f)(0)) e^{-xt} dt$, où F désigne la primitive de f qui s'annule en 0.

3.1.2. En déduire que $L(f)(x)$ admet $L(f)(0)$ comme limite lorsque x tend vers 0^+ . On pourra exploiter le fait que $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = L(f)(0)$ puis découper l'intégrale précédente en deux.

3.2. Montrer par un exemple que la fonction $L(f)$ peut être définie sur $]0, +\infty[$ et posséder une limite dans $\mathbb{C}$ en 0^+ sans que l'intégrale de f sur $\mathbb{R}^+$ soit convergente.

Dans la suite de cette partie, on se propose d'étudier une condition suffisante d'existence de $L(f)(0)$ lorsque la fonction $L(f)$ possède une limite dans $\mathbb{C}$ en 0^+ (théorème de Tauber).

3.3. Théorème de Tauber

Dans cette question, on suppose que la fonction $t \mapsto tf(t)$ tend vers 0 en $+\infty$.

3.3.1. Justifier que $\sigma(f) \leq 0$.

3.3.2. Montrer que la fonction $a \mapsto \frac{1}{a} \int_0^a |tf(t)| dt$, définie sur $]0, +\infty[$, tend vers 0 en $+\infty$.

3.3.3. Montrer que, pour tout réel u , $1 - e^{-u} \leq u$.

3.3.4. Montrer que, pour tous x et a réels strictement positifs, on a

$$\left| L(f)(x) - \int_0^a f(t) dt \right| \leq \int_0^a (1 - e^{-xt}) |f(t)| dt + \int_a^{+\infty} e^{-xt} |f(t)| dt,$$

puis en déduire que

$$\left| L(f)(x) - \int_0^a f(t) dt \right| \leq x \int_0^a |tf(t)| dt + \frac{1}{ax} \sup_{t \geq a} |tf(t)|.$$

3.3.5. On suppose de plus que la fonction $L(f)$ possède une limite $\mu \in \mathbb{C}$ en 0^+ . En choisissant convenablement x en fonction de a , déduire de ce qui précède que $L(f)(0)$ existe et vaut μ .

4^{ème} partie

Une généralisation du théorème de Tauber dans le cas réel

Dans cette partie, on prend f dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et on suppose que la fonction $t \mapsto tf(t)$ est bornée sur $[0, +\infty[$. On pose $M = \sup_{t \geq 0} |tf(t)|$ et on désigne par f_1, f_2 et f_3 les fonctions définies par :

$$f_1(x) = \int_0^x tf(t) dt, \quad x \geq 0, \quad f_2(x) = \frac{f_1(x)}{x}, \quad x > 0 \quad \text{et} \quad f_3(x) = \frac{f_1(x)}{x^2}, \quad x > 0.$$

4.1. Justifier que les fonctions f_2 et f_3 sont continues sur $]0, +\infty[$ et montrer qu'elles sont prolongeables par continuité en 0. On pourra utiliser le théorème de Rolle pour traiter f_3 .

Dans la suite, on notera encore f_2 et f_3 les prolongements par continuité ainsi obtenus.

4.2. Montrer que, pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f_2(t)e^{-xt}$ admet 0 comme limite en $+\infty$.

4.3. Montrer que, pour tout $x > 0$, les fonctions $t \mapsto f_2(t)e^{-xt}$ et $t \mapsto f_3(t)e^{-xt}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$. En particulier $\sigma(f_2) \leq 0$ et $\sigma(f_3) \leq 0$.

4.4. Montrer, pour tout triplet (u, v, x) de réels > 0 , la relation

$$\int_u^v f(t)e^{-xt} dt = f_2(v)e^{-xv} - f_2(u)e^{-xu} + x \int_u^v f_2(t)e^{-xt} dt + \int_u^v f_3(t)e^{-xt} dt,$$

puis en déduire que $\sigma(f) \leq 0$ et que $L(f)(x) = xL(f_2)(x) + L(f_3)(x)$, $x > 0$.

On suppose désormais que la fonction $L(f)$ admet 0 comme limite en 0^+ .

4.5. On va montrer ici que la fonction $t \mapsto tf_3(t)$ tend vers 0 en $+\infty$. On note g la fonction définie par $g(t) = 1 - \frac{tf(t)}{M}$, $t \geq 0$ où $M = \sup_{t \geq 0} |tf(t)|$. Il est clair que $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $g \geq 0$ et $\sigma(g) \leq 0$.

4.5.1. Montrer, en utilisant le lemme de Littlewoode, que la fonction $x \mapsto x(L(f))'(x)$ est de limite nulle en 0^+ .

4.5.2. En déduire que la fonction $x \mapsto xL(g)(x)$ admet 1 comme limite en 0^+ .

4.5.3. Montrer alors que la fonction $x \mapsto xf_3(x)$ tend vers 0 en $+\infty$. On pourra utiliser Césaro.

4.6. Montrer que la fonction $x \mapsto xL(f_2)(x)$ admet 0 comme limite en 0^+ . On pourra utiliser en le justifiant le fait que $f_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

4.7. En déduire que $L(f_3)(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ puis montrer que $L(f_3)(0)$ existe et vaut 0.

4.8. Montrer alors que $L(f)(0)$ existe et vaut 0. On pourra effectuer une intégration par partie.

4.9. On considère ici une fonction $\phi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que la fonction $t \mapsto t\phi(t)$ soit bornée sur $[0, +\infty[$ et on suppose de plus que la fonction $L(\phi)$, définie sur $]0, +\infty[$, admet en 0^+ une limite $\mu \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $L(\phi)(0)$ existe et vaut μ .

FIN DE L'ÉPREUVE