

Concours communs d'accès aux cycles d'ingénieurs
Epreuve de Mathématiques
Durée 1h30

Exercice 1 Soit $\alpha_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_0 = 0$. On considère les fonctions

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n x^n}{(n)!} \quad \text{et} \quad h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n.$$

1. Vérifier que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que g est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Exprimer à l'aide des fonctions usuelles les fonctions $xf(x)$ et $e^{-x}f(x)$.
4. Exprimer $g' - g$ en fonction de f .
5. Montrer que pour tout réel x , $g(x) = e^x \int_0^x e^{-t} f(t) dt$.
6. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x e^{-t} f(t) dt.$$

Montrer que la fonction F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et expliciter son développement.

7. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 1} \alpha_n x^n$.
8. Préciser l'ensemble de définition Δ de la fonction h .
9. Expliciter $h(x)$ pour tout $x \in \Delta$.
10. Expliciter la valeur de $h(\frac{1}{2})$.

Exercice 2 On considère l'équation différentielle

$$y' - \frac{y}{x} - y^2 = -9x^2. \quad (E)$$

1. Déterminer a tel que $y_0(x) = ax$ soit une solution particulière de (E) .
2. On pose $y = y_0 - \frac{1}{z}$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle

$$z' + (6x + \frac{1}{x})z = 1. \quad (E_1)$$

3. Résoudre (E_1) .
4. Déterminer toutes les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$