

Concours MICDA : Epreuve de Mathématiques

EXERCICE 1. Soient E un ensemble fini non vide et x un élément fixé de E . Les relations définies ci-dessous sont-elles des relations d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$?

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), ARB \iff A = B$
2. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), ARB \iff A \subset B$
3. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), ARB \iff x \in A \cap \bar{B}$
4. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), ARB \iff x \in A \cup \bar{B}$

EXERCICE 2. Nier la proposition suivantes : "tous les habitants de la rue du Mahamed Ali qui ont les yeux noirs gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans".

EXERCICE 3. Écrire la négation des assertions suivantes où P, Q, R, S sont des propositions.

1. $P \Rightarrow Q$,
2. P et non Q ,
3. P et (Q et R),
4. P ou (Q et R),
5. $(P \text{ et } Q) \Rightarrow (R \Rightarrow S)$.

EXERCICE 4.

1. Dans le plan, on considère trois droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ formant un "vrai" triangle : elles ne sont pas concourantes, et il n'y en a pas deux parallèles. Donner le nombre R_3 de régions (zones blanches) découpées par ces trois droites.
2. On considère quatre droites $\Delta_1, \dots, \Delta_4$, telles qu'il n'en existe pas trois concourantes, ni deux parallèles. Donner le nombre R_4 de régions découpées par ces quatre droites.
3. On considère n droites $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, telles qu'il n'en existe pas trois concourantes, ni deux parallèles. Soit R_n le nombre de régions délimitées par $\Delta_1 \dots \Delta_n$, et R_{n-1} le nombre de régions délimitées par $\Delta_1 \dots \Delta_{n-1}$. Montrer que $R_n = R_{n-1} + n$.
4. Calculer par récurrence le nombre de régions délimitées par n droites en position générale, c'est-à-dire telles qu'il n'en existe pas trois concourantes ni deux parallèles.

EXERCICE 5. Soit A, B deux ensembles, montrer $\mathcal{C}(A \cup B) = \mathcal{C}A \cap \mathcal{C}B$ et $\mathcal{C}(A \cap B) = \mathcal{C}A \cup \mathcal{C}B$.