

2011

Soit $S = (O\Sigma)$ un solide homogène de masse m , de révolution autour de l'axe $\vec{Oz}$ (Voir figure). Nous nous proposons d'étudier le mouvement de S autour d'un point fixe appartenant à son axe de révolution. La liaison mécanique de S au point fixe O n'est pas représentée.

$R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le repère par rapport auquel sera étudié le mouvement de S ,
 $R_1(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$ le repère obtenu par rotation de R_0 d'un angle ψ autour de $\vec{Oz}_0$.
 $R_2(O, \vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$ se déduit de R_1 par l'angle θ autour de $\vec{u}$, φ l'angle de rotation du solide autour $\vec{Oz}$ par rapport au repère R_2 . On pose $|\vec{OG}| = a$ où a est une constante réelle positive. Pour simplifier les calculs on choisira R_2 comme repère de projection.

Noter les moments d'inertie par rapport aux axes du repère principal $R_2 : A, A, C$ sans les calculer.

dans $\frac{O}{G}$

- 1) Calculer le moment cinétique $\vec{\sigma}(S/R_0, O)$ du solide par rapport au point O .
- 2) En appliquant le théorème du moment cinétique, montrer que :

$$\vec{\sigma}(S/R_0, O) \cdot \vec{z}_0 = \lambda_1 \quad \text{et} \quad \vec{\sigma}(S/R_0, O) \cdot \vec{z} = \lambda_2$$

où λ_1 et λ_2 sont deux constantes réelles arbitraires.

- 3) En déduire deux intégrales premières du mouvement de S/R_0 .
- 4) Trouver une troisième intégrale première en utilisant le théorème de l'énergie cinétique. Montrer que l'énergie mécanique E_m peut se mettre sous la forme :

$$\vec{\sigma} = \dot{\theta} \vec{u} + (\dot{\psi} \sin \theta + \dot{\theta}) \vec{w} + (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \vec{z}$$

$$E_m = \frac{1}{2} A \dot{\theta}^2 + E(\theta) \quad \text{où } E(\theta) \text{ est une fonction que l'on déterminera}$$

suite 2011
mécanique

