



Partie A : Algèbre (10 pts)

Exercice 1. Soit A une matrice 2×2 à coefficients réels.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On suppose $a + c = b + d = 1$ et $a - b \neq 1$.1. Soient (x_1, x_2) , (y_1, y_2) deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, tels que

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

montrer qu'alors

$$y_1 + y_2 = x_1 + x_2.$$

2. Soit le vecteur $\vec{x} = (1, -1)$, vérifier que $\vec{x}$ est un vecteur propre de A , et déterminer sa valeur propre.3. Déterminer le polynôme caractéristique de A et calculer ses racines.4. Déterminer un vecteur propre, $\vec{y}$, de A non colinéaire à $\vec{x}$.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel de dimension 3. On note $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de E , si $\vec{u}$ est un vecteur de E on note (x, y, z) ses coordonnées dans la base B . Soit f une application linéaire de E dans lui-même, définie par

$$f : E \longrightarrow E$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + y - z \\ 2x + 2z \\ 4x - 2y + 4z \end{pmatrix}$$

1. Donner la matrice A de f dans la base B .

Suite math
2009

2. Déterminer les sous-espaces $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.

3. Soient $\vec{u}_1 = (1, 0, -1)$, $\vec{u}_2 = (1, 2, 0)$ et $\vec{u}_3 = (0, 1, 1)$. Démontrer que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de E .

4. Calculer $f(\vec{u}_1)$, $f(\vec{u}_2)$ et $f(\vec{u}_3)$ et déterminer la matrice B de f dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.

Partie B : Analyse (10 pts)

I. On considère l'équation différentielle

$$\operatorname{sh} x f'(x) + \operatorname{ch} x f(x) = 1$$

Résoudre cette équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$; $\mathbb{R}_-^*$; $\mathbb{R}^*$; puis sur $\mathbb{R}$.

II. 1) Étudier sommairement la fonction g définie par la relation

$$g(x) = \frac{1}{(2x+1)^2} \text{ sur } \mathbb{R}_+. \text{ (Présenter uniquement le tableau des variations)}$$

Étudier son intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$. Calculer éventuellement la valeur de son intégrale sur $\mathbb{R}_+$.

2) On considère la série $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$; étudier sa convergence.

3) Sachant que $\xi(2) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, déduire la valeur exacte de la somme $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{6} = 0$$