



ROYAUME DU MAROC
UNIVERSITE ABDELMALEK ESSAADI
Faculté des Sciences et Techniques de Tanger
Département Génie Informatique

Concours d'accès à la 1^{ère} Année du
Cycle d'Ingénieur
Filière : Logiciel et Système Informatique

Epreuve de Mathématiques

Durée : 2h

Attention :

Calculatrice Autorisée

Chaque question peut comporter au plus deux réponses exactes. (il est envisageable qu'une question n'ait aucune réponse exacte, mais en aucun cas elle ne peut en avoir 3 ou plus)

Barème : une réponse juste : +1, une réponse fausse : -1, pas de réponse : 0

Question 1 : Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ?

- A) $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(5\theta) = 16\cos^5(\theta) + 5\cos(\theta)$
 B) $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(5\theta) = 16\cos^5(\theta) - 20\cos^3(\theta) + 5\cos(\theta)$
 C) $\cos \frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$
 D) $\cos \frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$ car $\cos \frac{\pi}{10} < \cos \frac{\pi}{3}$

Question 2 : Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $I(1, 2)$, $M(2, 3)$ et $M'(\sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$. La similitude de centre I qui transforme M en M' est alors

- A) de rapport 2
 B) d'angle $\frac{\pi}{4}$
 C) de rapport $\frac{1}{2}$
 D) d'angle $\frac{\pi}{3}$

Question 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à résoudre l'équation d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(2k\theta) = 0$$

- A) Si θ est solution, alors $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin^2(k\theta) = 2^{n-1}$
 B) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(2k\theta) = \cos(n\theta) \left(\frac{\cos(\theta)}{2} \right)^n$
 C) L'ensemble des solutions est $\left\{ \frac{\pi}{n} + k\frac{\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
 D) Il n'y a pas de solution à cette équation

Question 4 : On considère l'application f qui à tout nombre complexe $z \neq i$ associe

$$f(z) = \frac{z + i}{z - i}$$

On note $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ et $i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) = 0\}$

- A) f est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ dans $\mathbb{C}$
 B) $f(\mathbb{R}) = \mathcal{U}$
 C) $f(\mathcal{U} \setminus \{i\}) = i\mathbb{R}$
 D) $f(i\mathbb{R} \setminus \{i\}) = \mathbb{R}$

Question 5 : On cherche le lieu des points d'affixe z tels que z, z^2 et z^3 soient les affixes de trois points alignés. On note H cet ensemble de points et H' l'ensemble de leurs affixes.

- A) $z \in H \iff z \in \mathbb{R}$ ou $z^3 + z^2 + z$ est imaginaire pur
 B) $3\operatorname{Im}(z^3 + z^2 + z) = 3(\operatorname{Re}(z))^2 - (3\operatorname{Im}(z))^2 + 2\operatorname{Re}(z) + 1$
 C) H est une hyperbole équilatère centrée en $(-\frac{1}{3}, 0)$ de grand axe parallèle à l'axe des imaginaires et de demi-grand axe $\sqrt{\frac{1}{3}}$
 D) H contient une hyperbole centrée en $(-\frac{1}{3}, 0)$ de grand axe parallèle à l'axe des imaginaires, de demi-grand axe $\sqrt{\frac{1}{3}}$ et dont les asymptotes ont $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$ pour coefficients directeurs.

Question 6 : On considère les suites $(u_n)_{n \geq 2}$ et $(v_n)_{n \geq 2}$ définies par :

$$(n \geq 2), u_n = \prod_{k=2}^n \cos \frac{\pi}{2^k} \text{ et } v_n = u_n \sin \frac{\pi}{2^n}$$

- A) $(u_n)_{n \geq 2}$ est croissante et majorée par 1, elle est donc convergente.

- B) $(v_n)_{n \geq 2}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$
 C) $(u_n)_{n \geq 2}$ et $(v_n)_{n \geq 2}$ sont adjacentes
 D) $(u_n)_{n \geq 2}$ est convergente de limite $\frac{1}{\pi}$

Question 7: Soit la fonction f définie par :

$$(\forall t \geq 0), f(t) = \ln(1+t) + \frac{t^2}{1+t^2}$$

- A) f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+$, croissante et concave
 B) La courbe représentative de f admet une asymptote oblique en $+\infty$ car

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t} = 1$$

- C) f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ et sa bijection réciproque est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car $(\forall t \geq 0), f'(t) \neq 0$
 D) f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ et sa bijection réciproque est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car toute bijection dérivable admet une réciproque dérivable

Question 8: f désignant la fonction définie à la question 7, on peut montrer que

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*), \exists a_n \in \mathbb{R}_+, f(a_n) = \frac{1}{n}$$

- A) $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite croissante car f^{-1} est décroissante et $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ est décroissante
 B) $(a_n)_{n \geq 1}$ est convergente de limite 0 puisque f^{-1} est continue à droite en 0
 C) $(a_n)_{n \geq 1}$ est convergente de limite 0 puisque $(a_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et positive
 D) $a_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}$

Question 9: On considère à présent une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ admettant une limite finie l en $+\infty$ et a un nombre réel strictement positif.

- A) $y \mapsto \int_0^y f(t) dt$ est continue sur $[b, b+a]$ et dérivable sur $]b, b+a[$ pour tout $b \in \mathbb{R}$
 B) $\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_y^{y+a} f(t) dt + al = 0$
 C) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t+a) - f(t) dt = \int_0^a f(t) dt + al$
 D) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \arctan(t+1) - \arctan(t) dt = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4}$

Question 10: A) $(\forall x \in \mathbb{R}), (\exists \theta \in]0,1[, (\forall n \in \mathbb{N}), e^x = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta}$

- B) $(\forall x \in \mathbb{R}), (\forall n \in \mathbb{N}), e^x > \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!}$
 C) $(\forall x \in \mathbb{R}), (\forall n \in \mathbb{N}), e^x \geq \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!}$
 D) $(\forall x \in \mathbb{R}), (\forall n \in \mathbb{N}), e^x \leq \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!}$

Question 11: Soient a et b deux fonctions réelles à valeurs strictement positives de la variable réelle et $a \in \mathbb{R}$ tel que $a(x) \sim_{x \rightarrow a} b(x)$.

- A) Il existe une fonction ε définie sur un voisinage de a telle que

$$\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0 \text{ et } \ln(a(x)) = \ln(b(x)) + \ln(1 + \varepsilon(x))$$

- B) $\ln(a(x)) \sim_{x \rightarrow a} \ln(b(x))$
 C) $\ln(1 + \frac{x}{2} + \sin^2(x)) \sim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)$ car $1 + \frac{x}{2} + \sin^2(x) \sim_{x \rightarrow 0} 1+x$
 D) $\ln|\cos(x)| \sim_{x \rightarrow 0} \ln(1+|x|)$ car $|\cos(x)| \sim_{x \rightarrow 0} 1+|x|$

- On 12: A) Pour $\beta \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(\alpha x))}{\ln(\cos(\beta x))} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$
- B) Pour $\beta \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(\alpha x))}{\ln(\cos(\beta x))} = \alpha^2$
- C) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \left(\tan \frac{3x}{2} \right)^{\tan(3x)} = e^{-1}$
- D) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \left(\tan \frac{3x}{2} \right)^{\tan(3x)} = e$

Question 13: Soit f la fonction définie par:

$$\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \neq 0 \longmapsto \exp\left(\frac{x-1}{x^2}\right) \\ 0 \longmapsto 0 \end{cases}$$

- A) f est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et non dérivable en 0
- B) $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{2-x}{x^3} \exp\left(\frac{x-1}{x^2}\right)$
- C) Sur $[1, +\infty[$, f ne possède qu'un extremum, en 2, puisque $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$
- D) L'équation $f(x) = x$ admet deux et seulement deux solutions sur $\mathbb{R}$ et la droite d'équation $x = y$ est tangente à la courbe représentative de f

Question 14: Soit f la fonction de la variable réelle définie par: $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right) \sqrt{x(x+2)}$

- A) Aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$, $\sqrt{x(x+2)} = x\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$
- B) Au voisinage de $+\infty$, la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = x + 2$ pour asymptote
- C) Au voisinage de $-\infty$, la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = x + 2$ pour asymptote
- D) Au voisinage de $-\infty$, la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = x + 2$ pour asymptote et la courbe est au-dessus de son asymptote

Question 15: Si f est une fonction continue sur un segment réel $[a, b]$ ($a < b$)

- A) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt$
- B) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt$
- C) $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (n+k)} = n \exp\left(\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)\right)$
- D) $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (n+k)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4n}{e}$

Question 16: On désigne par $[x]$ la partie entière du nombre réel x . On considère la fonction réelle f définie par $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \int_0^x 3^{-[t]} dt$.

- A) f est définie sur $\mathbb{R}$ car $t \mapsto 3^{-[t]}$ est une fonction en escaliers
- B) $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = 3 \left(\frac{1-3^{-n}}{2} \right)$
- C) Pour montrer qu'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ admet une limite réelle en $+\infty$, il suffit de montrer que la suite $(g(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente
- D) f est croissante sur $\mathbb{R}$ et majorée par $\frac{1}{e \ln 3}$. f admet donc une limite réelle en $+\infty$, égale à $\frac{3}{2}$, limite de la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$

Question 17: On cherche à déterminer les fonctions g de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ vérifiant:

$$(P) \quad (\forall x > 0), \quad g'(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$$

- A) Si g vérifie (P), alors g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^*$ et $(\forall x > 0), x^2 g''(x) = -g'(x)$

- B) Pour tout $x > 0$, il existe un unique $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = e^t$ et la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto h(t) = g(e^t)$ est solution de l'équation différentielle $h'' - h' + h = 0$.
- C) Les fonctions $g : x > 0 \mapsto \sqrt{x} (A \cos(\sqrt{3} \ln(x)) + B \sin(\sqrt{3} \ln(x)))$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ vérifient (P) .
- D) L'ensemble des fonctions vérifiant (P) est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2.

Question 18 : Pour $c > 0$, on cherche à résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$(E) : \quad c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

où la fonction inconnue f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

On pose, pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $(x(u, v), y(u, v))$ l'unique solution du système $\begin{cases} u = x + cy \\ v = x - cy \end{cases}$ d'inconnues x et y . On considère g la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$(\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2), \quad g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$$

- A) $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) + c \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v))$
- B) $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) - \frac{1}{2c} \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v))$
- C) $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) = \frac{1}{4c^2} \left(c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)(x(u, v), y(u, v))$
- D) $(x, y) \mapsto e^x \cdot \cosh(cy) + 2$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}^2$.

Question 19 : On considère le domaine D dont on veut calculer l'aire $\mathcal{A}_D$.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x^2 + y^2 - 2y > 0\}$$

On note $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \times]-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\rho, \theta) \longmapsto (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \end{cases}$

- A) $\varphi^{-1}(D) = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times]-\pi, \pi], 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}, 2 \sin(\theta) < \rho \leq 1\}$
- B) $\varphi^{-1}(D) = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times]-\pi, \pi], 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}, 2 \sin(\theta) \leq \rho \leq 1\}$

C) $\mathcal{A}_D = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{6}} \int_{\rho=2 \sin \theta}^{\rho=1} \rho \, d\rho \, d\theta = \frac{\pi}{6} + 1 - \sqrt{3}$

D) $\mathcal{A}_D = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{6}} \int_{\rho=2 \sin \theta}^{\rho=1} \rho \, d\rho \, d\theta = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Question 20 : Soient p un nombre entier naturel non nul et x un nombre entier relatif non nul différent de 1.

- A) $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1), x^{n-1} = 1$ et x sont premiers entre eux d'après le théorème de Bézout.
- B) $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2), p$ divise $x^2 - x \iff p$ divise $x^n - x$ car si p divise un produit de nombres entiers ab , alors p divise a ou p divise b .

On désigne par U l'ensemble des nombres entiers relatifs y tels que $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2), 6$ divise $y^n - y$.

- C) U est strictement inclus dans $\{6k, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{1 + 6k, k \in \mathbb{Z}\}$.
- D) $U = \{6k, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{1 + 6k, k \in \mathbb{Z}\}$.

Question 21 : Soit E un ensemble de n éléments ($n \in \mathbb{N}^*$).

- X, Y et Z désigneront par la suite des parties de E .
- A) Le nombre de couples (X, Y) de parties de E telles que $X \cap Y = \emptyset$ est 3^n .
- B) Le nombre de couples (X, Y) de parties de E telles que $X \cup Y = E$ est 3^n .
- C) Le nombre de couples (X, Y) de parties de E telles que (X, Y) forme une partition de E est 3^n .
- D) Le nombre de triplets (X, Y, Z) de parties de E telles que $X \cap Y = Z$ est 3^n .

Question 22 : A propos de structures

- A) L'ensemble des polynômes de degré égal à n ($n \geq 1$) est un groupe pour l'addition usuelle des polynômes.
- B) L'ensemble des matrices carrées de taille n ($n \geq 1$) muni des opérations matricielles usuelles est un corps.

- C) L'ensemble des suites convergentes de limite 0 muni de la multiplication usuelle des suites est un groupe
- D) Si G est un groupe pour une loi T donnée et $a \in G$, alors l'ensemble $aG = \{aTx, x \in G\}$ muni de T est un groupe

Question 23 : On considère un polynôme P non nul tel que

$$P(X^2) = P(X+1)P(X) = 0.$$

- A) Si a est une racine de P , alors $(\forall n \in \mathbb{N}^*) a^{2^n}$ est racine de P
- B) Si a est une racine de P , alors $(\forall n \in \mathbb{N}^*) a^{2^n}$ est racine de P
- C) Si a est une racine de P , alors il existe $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ tel que $a^p = a$
- D) Les racines de P sont des racines de l'unité

Question 24 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec : $(\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket), a_k \in \mathbb{Z}$ et $a_n \neq 0$.

- A) Si $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ est un couple de nombres entiers premiers entre eux et tels que $\frac{p}{q}$ soit une racine de P , alors p divise a_0 et q divise a_n
- B) Si de plus $a_n = 1$ et P possède une racine rationnelle, alors cette racine est un nombre entier
- C) Les racines rationnelles éventuelles de $2X^3 - X^2 - 13X + 5$ sont dans $\{1, 5, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}\}$
- D) $2X^4 + X^2 + 5X + 5$ admet une racine rationnelle

Question 25 : On appelle ici suite de polynômes de Tchebychev toute suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes vérifiant

$$(\forall n \in \mathbb{N}), (\forall \theta \in \mathbb{R}), T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

- A) $(\forall n \in \mathbb{N})$ et $(\forall \theta \in \mathbb{R})$, on a

$$\cos(n\theta) = \Re e((e^{i\theta})^n) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (\cos \theta)^{n-2k} (1 - \cos^2 \theta)^k$$

donc une telle suite de polynômes de Tchebychev existe et ceux-ci peuvent être choisis à coefficients entiers

- B) Si $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\tilde{T}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites de polynômes de Tchebychev, alors

$$(\forall n \in \mathbb{N}), (\forall x \in [-1, 1]), T_n(x) = \tilde{T}_n(x)$$

et par conséquent $(\forall n \in \mathbb{N}), T_n = \tilde{T}_n$.

ce qui prouve l'unicité de la suite des polynômes de Tchebychev

- C) $(\forall n \in \mathbb{N}^*), T_{n+1}(X) = 2T_n(X) - X^2 T_{n-1}(X)$
puisque $(\forall n \in \mathbb{N}^*), (\forall \theta \in \mathbb{R}), \cos((n+1)\theta) = 2\cos(n\theta) - \cos^2 \theta \cos((n-1)\theta)$
- D) $(\forall n \in \mathbb{N}^*), \deg(T_n) = n$ et $\exists Q_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X], T_n(X) = X^n + Q_n(X)$

Question 26 : A) $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}, P_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$ possède au moins une racine multiple puisque $P'_n = P_n$

- B) $\forall n \in \mathbb{N}, P_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$ est l'unique polynôme vérifiant $P_n(X) = P'_n(X) = \frac{X^n}{n!}$

- C) $(\forall n \in \mathbb{N}^*), 1$ est racine double de $nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$

- D) Si $m \in \mathbb{N}^*$ est divisible par $n \in \mathbb{N}^*$, alors $(\forall a \in \mathbb{C}), X^m - a^m$ est divisible par $X^n - a^n$ dans $\mathbb{C}[X]$

Question 27 : Considérons E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles définies sur $\mathbb{R}$, et $\| \cdot \| : x \geq 0 \mapsto 1$

- A) $(\forall n \in \mathbb{N}), (\| \cdot \|, x \geq 0 \mapsto \cos(x), x \geq 0 \mapsto \cos(2x), \dots, x \geq 0 \mapsto \cos(nx))$ est une famille libre de fonctions de E

- B) $(\forall n \in \mathbb{N}), (\| \cdot \|, \cos, \cos^2, \dots, \cos^n)$ est une famille libre de fonctions de E

- C) (ch, sh) est une famille liée de fonctions de E

- D) $(\| \cdot \|, \arctan, x \geq 0 \mapsto \arctan(\frac{1}{x}))$ est une famille libre de fonctions de E