

PARTIE I

Q1 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = (x + y, x - y)$.
On démontre que f

A. n'est pas injective	B. n'est pas surjective	C. n'est ni injective ni surjective	D. est bijective
-------------------------------	--------------------------------	--	-------------------------

(Les questions Q2 et Q3 sont liées)

Soit f l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ par : $f(1,0,0) = (1,1)$; $f(0,1,0) = (0,1)$ et $f(0,0,1) = (-1,1)$. Alors

Q2 $f(x, y, z)$ vaut

A. $(x - z, x + y + z)$	B. $(x - y, x + y + z)$	C. $(y - z, x + y + z)$	D. $(x - z, x - y + z)$
--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------

Q3 Le noyau de l'application linéaire f vérifie

A. $\text{Ker } f = \{(0,0,0)\}$	B. $\dim \text{ker } f = 1$	C. $\dim \text{ker } f = 2$	D. $\dim \text{ker } f = 3$
---	------------------------------------	------------------------------------	------------------------------------

Q4 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par :
 $f(x, y, z, t) = (x + y - t, x + z + 2t, 2x + y - z, -x + 2y + z)$
 Le rang de f (égal à $\dim \text{Im } f$) vaut

A. 1	B. 2	C. 3	D. 4
-------------	-------------	-------------	-------------

Q5 Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Le déterminant $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$ est égal à

A. 0	B. abc	C. $2abc$	D. $-2abc$
-------------	-----------------	------------------	-------------------

(Les questions Q6, Q7 et Q8 sont liées)

On considère la matrice carrée $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Alors

Q6 le vecteur $u = (2,1)$

A. n'est pas vecteur propre de A .	B. est vecteur propre de A associé à la valeur propre -1.	C. est vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.	D. est vecteur propre de A associé à la valeur propre 2.
---	--	---	---

Q7 le vecteur $v = (-1,2)$

A. n'est pas vecteur propre de A .	B. est vecteur propre de A associé à la valeur propre -1.	C. est vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.	D. est vecteur propre de A associé à la valeur propre 2.
---	--	---	---

Q8 Soit $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Alors P est inversible et $P^{-1}AP$ vaut

A. $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$	B. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$	C. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
---	---	---	---

PARTIE II

(Les questions Q9, Q10 et Q11 sont liées)

On note $z = e^{2i\pi/7}$ une racine septième de 1.On pose $u = z + z^2 + z^4$ et $v = z^3 + z^5 + z^6$ **Q9** Le calcul de $u + v$ donne

A. -1	B. 1	C. 2	D. 3
--------------	-------------	-------------	-------------

Q10 Le calcul de uv donne

A. -1	B. 1	C. 2	D. 3
--------------	-------------	-------------	-------------

Q11 Les valeurs de u et v sont

A. $u = \frac{i\sqrt{7}}{2}$ et $v = \frac{-i\sqrt{7}}{2}$	B. $u = \frac{-i\sqrt{7}}{2}$ et $v = \frac{+i\sqrt{7}}{2}$	C. $u = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$ et $v = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$	D. $u = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ et $v = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$
---	--	--	--

Q12 L'ensemble des points M d'affixe z tels que Le nombre $u = \frac{1+z}{1-z}$ soit de module 1 est

A. L'axe des réels	B. L'axe des réels privé de (1, 0)	C. L'axe des imaginaires	D. L'axe des imaginaires privé de (0, 1)
---------------------------	---	---------------------------------	---

Q13 Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ avec $a \neq b$. Le reste de la division euclidienne de $P \in \mathbb{C}[X]$ par le polynôme $(X - a)(X - b)$ est

A. $\frac{aP(b)-bP(a)}{b-a}X + \frac{P(a)-P(b)}{b-a}$	B. $\frac{P(b)+P(a)}{b-a}X + \frac{bP(a)+aP(b)}{b-a}$	C. $\frac{aP(b)-bP(a)}{b-a}X + \frac{P(a)-P(b)}{b-a}$	D. $\frac{P(b)-P(a)}{b-a}X + \frac{bP(a)-aP(b)}{b-a}$
--	--	--	--

Q14 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n . On note $x_1, x_2, \dots, x_n$ ses racines distinctes ou non. Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $P(a) \neq 0$. $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a-x_i}$ est égale à

A. $-\frac{P'(a)}{P(a)}$	B. $\frac{P'(a)}{P(a)}$	C. $-\frac{P(a)}{P'(a)}$	D. $\frac{P(a)}{P'(a)}$
---------------------------------	--------------------------------	---------------------------------	--------------------------------

Q15 La décomposition en élément simples, sur $\mathbb{R}[X]$, de la fraction rationnelle $\frac{X^2}{X^4+1}$ est

A. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{X}{X^2-X\sqrt{2}+1} + \frac{X}{X^2+X\sqrt{2}+1} \right)$	B. $\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{X}{X^2-X\sqrt{2}+1} - \frac{X}{X^2+X\sqrt{2}+1} \right)$	C. $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{X}{X^2-X\sqrt{2}+1} + \frac{X}{X^2+X\sqrt{2}+1} \right)$	D. $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{X}{X^2-X\sqrt{2}+1} - \frac{X}{X^2+X\sqrt{2}+1} \right)$
--	--	---	---

PARTIE III

Q16 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1 - \cos x} \right)$ vaut

A. 0	B. $\frac{1}{2}$	C. 1	D. $+\infty$
-------------	-------------------------	-------------	---------------------

Q17 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$ vaut

A. 0	B. 1	C. e^{-1}	D. e
-------------	-------------	--------------------	---------------

Q18 Soit f la fonction définie par $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. alors

A. f est continue en 0, non dérivable en 0	B. f est continue et dérivable en 0	C. f n'est ni continue, ni dérivable en 0	D. f est continue en 0, dérivable à droite et non dérivable à gauche en 0
---	--	--	--

Q19 Soit $f(x) = \ln(1+x)$ ($x > -1$). La dérivée $n^{\text{ième}}$ de f au point x est égale à

A. $\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$	B. $\frac{(-1)^{n-1} n!}{(1+x)^{n+1}}$	C. $\frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{(1+x)^n}$	D. $\frac{(-1)^n (n-1)!}{(1+x)^n}$
---	---	---	---

Q20 Soit P la fonction polynomiale réelle définie par $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ ($\forall x \in \mathbb{R}$). Alors a_k est égal à

A. $\frac{f^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}$	B. $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$	C. $k! f^{(k)}(0)$	D. $\frac{f^{(k)}(1)}{k!}$
---	-----------------------------------	---------------------------	-----------------------------------

Q21 Soit f la fonction à deux variables définie par : $f(x, y) = \frac{x^5 y^3}{x^6 + y^4}$
La limite de f en $(0,0)$

A. n'existe pas	B. est égale à 0	C. est égale à 1	D. est égale à $+\infty$
------------------------	-------------------------	-------------------------	---------------------------------

Q22 Soit la fonction f définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(1/\sqrt{x^2 + y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

A. n'existe pas	B. est égale à 0	C. est égale à 1	D. est égale à $+\infty$
------------------------	-------------------------	-------------------------	---------------------------------

Q23 Soit f la fonction définie par : $(\forall x \in \mathbb{R}), f(x) = \text{Arctan } x + 2 \text{Arctan}(\sqrt{1-x^2} - x)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est égale à

A. $x - \frac{\pi}{2}$	B. $-\frac{\pi}{4}$	C. $\frac{\pi}{4}$	D. $\frac{\pi}{2}$
-------------------------------	----------------------------	---------------------------	---------------------------

PARTIE IV**Q24** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique dont le terme général est

$$u_n = \frac{1 + 3 + 9 + \dots + 3^n}{3^{n+1}}$$

Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ est égale à

A. $\frac{1}{6}$	B. $\frac{1}{3}$	C. $\frac{1}{2}$	D. 3
-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------

Q25 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique dont le terme général est

$$u_n = n(e^{\frac{2}{n}} - 1)$$

Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ est égale à

A. 0	B. $\frac{1}{2}$	C. 2	D. $+\infty$
-------------	-------------------------	-------------	---------------------

Q26 la somme de la série numérique $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k! 2^{n-k}}$ est

A. $\frac{2e}{3}$	B. e	C. $\frac{e^2}{2}$	D. $+\infty$
--------------------------	---------------	---------------------------	---------------------

Q27 la somme de la série numérique $\sum_{n \geq 2} (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$

A. n'existe pas	B. est égale à $+\infty$	C. est égale à $3 \ln 2$	D. est égale à $\ln 2$
------------------------	---------------------------------	---------------------------------	-------------------------------

Q28 La somme de la série entière de terme général

$$u_n(x) = \frac{x^n}{n 2^n}$$

est égale à

A. $-\ln\left(1 - \frac{x}{2}\right)$	B. $\ln\left(1 - \frac{x}{2}\right)$	C. $-\frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right)$	D. $\frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right)$
--	---	--	---

Q29 Le développement en série entière de la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$ pour tout $x \in]-1, 1[$ est

A. $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) x^n$	B. $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n$	C. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}$	D. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{2^n}$
---	---	--	--

Q30 Le développement en série entière de la fonction définie par $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$

A. $\ln 6 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) \frac{x^n}{n}$	B. $\ln 6 - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) \frac{x^n}{n}$
---	---

C. $\ln 6 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) \frac{x^n}{n}$	D. $\ln 6 - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) \frac{x^n}{n}$
---	---