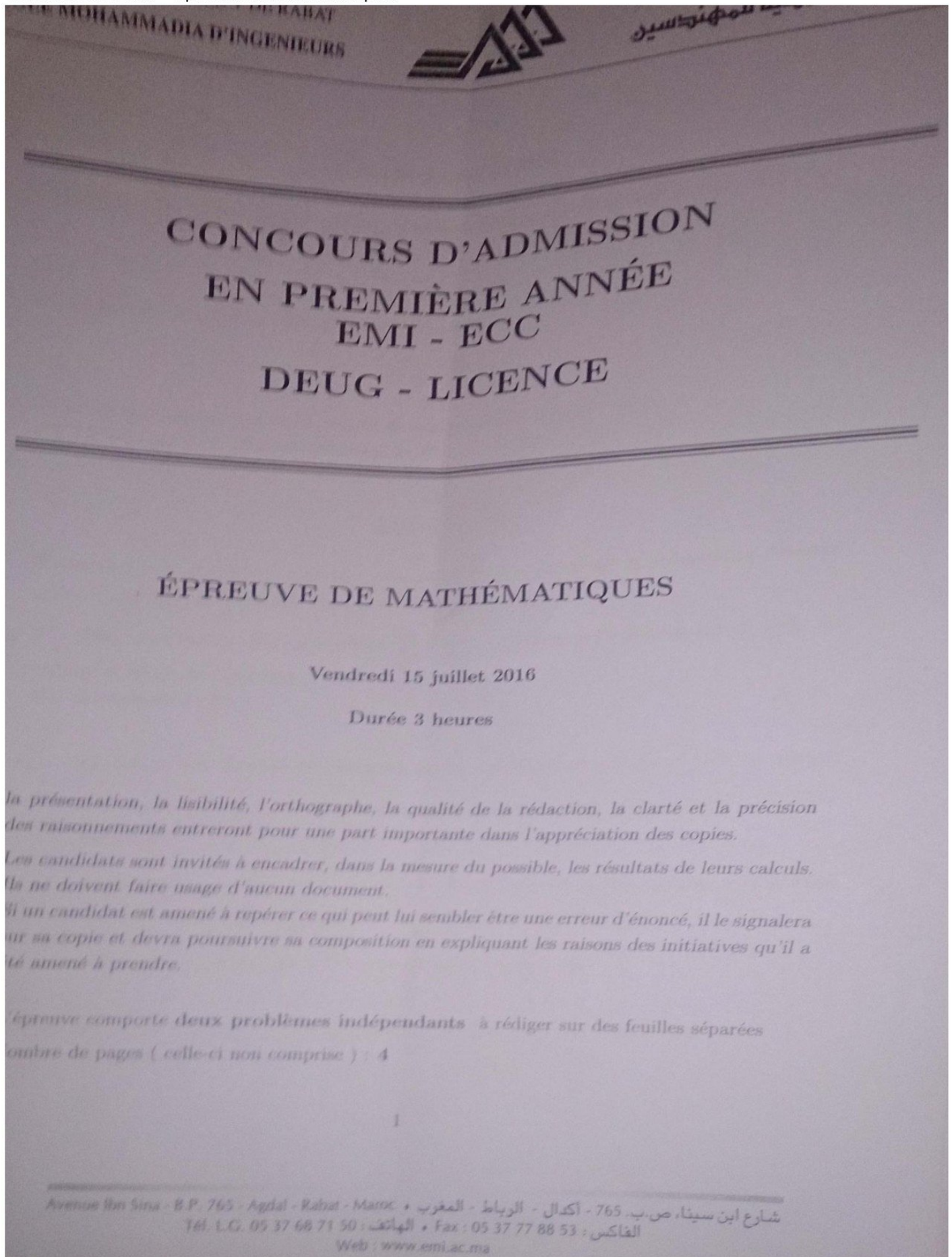




PARTIE I : ANALYSE.

I. Autour de la fonction zeta alternée de Riemann

Objectifs : On note F la fonction zeta alternée de Riemann définie par

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

et la fonction zeta de Riemann définie sur $]1; +\infty[$ par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Ce problème propose une étude croisée de quelques propriétés de F et ζ .

1°). Déterminer l'ensemble de définition de F .

✓ 2°). On considère la suite de fonctions $(g_n)_{n \geq 1}$ définie sur $[0; 1[$ par

$$g_n(t) = \sum_{k=0}^n (-t)^k$$

Déterminer la limite simple g de (g_n) puis, en utilisant le théorème de convergence dominée, montrer que $F(1) = \int_0^1 g(t) dt$. En déduire la valeur de $F(1)$.

✓ 3°). Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge normalement sur $[2; +\infty[$. En déduire la limite de F en $+\infty$.

4°). Dérivabilité de F

✓ (a) Soit $x > 0$. Étudier les variations sur $]0; +\infty[$ de la fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t^x}$ et en déduire que la suite $\left(\frac{\ln n}{n^x}\right)_{n \geq 1}$ est monotone à partir d'un certain rang (dépendant de x) que l'on précisera.

(b) Pour $n \geq 1$, on pose $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$. Si a est un réel strictement positif, démontrer que la série des dérivées $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge uniformément sur $[a; +\infty[$.

En déduire que F est une fonction de classe C^1 sur $]0; +\infty[$.

✓ 5°). Lien avec ζ .

Calculer, pour $x \geq 1$, $F(x) - \zeta(x)$ en fonction de x et de $\zeta(x)$. En déduire que :

$$F(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x).$$

Puis en déduire la limite de ζ en $+\infty$.

II. Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même

On rappelle que le produit de Cauchy de deux séries $\sum_{n \geq 1} a_n$ et $\sum_{n \geq 1} b_n$ est la série $\sum_{n \geq 2} c_n$ où $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$. Dans cette partie, on veut déterminer la nature selon la valeur de x , de la série

$\sum_{n \geq 2} c_n(x)$, produit de Cauchy de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ par elle-même.

Cette étude va illustrer le fait que le produit de Cauchy de deux séries convergentes n'est pas nécessairement une série convergente.

Dans toute cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et x un réel strictement positif.

6°. Étude de la convergence

(a) Indiquer sans aucun calcul la nature et la somme en fonction de F de la série produit $\sum_{n \geq 2} c_n(x)$, lorsque $x > 1$.

✓ (b) Démontrer que pour $x > 0$, $|c_n(x)| \geq \frac{4^x(n-1)}{n^{2x}}$.

En déduire pour $0 < x < 1/2$, la nature de la série $\sum_{n \geq 2} c_n(x)$

7°. Cas où $x = 1$

✓ (a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{X(n-X)}$

En déduire une expression de $c_n(x)$ en fonction $\frac{H_{n-1}}{n}$ où

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

(somme partielle de la série harmonique).

(b) Déterminer la monotonie de la suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n}\right)_{n \geq 2}$

(c) En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 2} c_n(x)$.

II.

On dit que l'endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension finie n sur un corps K quelconque est cyclique s'il existe un vecteur x_0 de E tel que $(u^k(x_0))_{k \geq 0}$ engendre E . On note M le polynôme minimal de u .

(a) Montrer que l'application $P \mapsto P(u)(x_0)$ de $K[X]$ sur E est linéaire, surjective et de noyau l'idéal (M) . En déduire que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E dans laquelle la matrice de u est la matrice compagnon associée à M .

(b) Montrer que l'application :

$$I \mapsto F_I = \{R(u)(x_0) | R \in I\}$$

est une bijection de l'ensemble des idéaux I de $K[X]$ contenant M sur l'ensemble des sous-espaces stables par u de E . En déduire qu'il n'existe qu'un nombre fini de sous-espaces stables par u .

(c) Montrer que les sous-espaces de K^n stables par l'endomorphisme u canoniquement associé à la matrice triangulaire supérieure :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

sont de la forme $Im u^k$ pour $k \in [0, n]$.

Nb : On rappelle que la matrice compagnon associée à un polynôme unitaire

$$P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$$

s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

PARTIE II : ALGÈBRE

I.

Soit n supérieur ou égal à 2. Si $A = (\alpha_{i,j})$ est une matrice de $M_n(\mathbb{C})$, on note :

$$l_i(A) = \sum_{k=1}^n \alpha_{i,k}, \quad c_j(A) = \sum_{k=1}^n \alpha_{k,j}$$

et :

$$d(A) = \sum_{k=1}^n \alpha_{k,k}, \quad a(A) = \sum_{k=1}^n \alpha_{k,n+1-k}.$$

- ✓ (a) Montrer que l'ensemble N_0 des matrices A vérifiant :

$$\forall (i, j) \in [1, n]^2, \quad l_i(A) = c_j(A) = 0$$

est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$ de dimension $(n-1)^2$.

- ✓ (b) Montrer que l'ensemble N des matrices A vérifiant :

$$\forall (i, j) \in [1, n]^2, \quad l_i(A) = c_j(A)$$

est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$ de dimension $(n-1)^2 + 1$.

- ✓ (c) Montrer que pour $n \geq 3$ l'ensemble M_0 des matrices A vérifiant :

$$d(A) = a(A) = 0 \quad \text{et} \quad \forall (i, j) \in [1, n]^2, \quad l_i(A) = c_j(A) = 0$$

est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$ de dimension $(n-1)^2 - 2$.

- ✓ (d) Montrer que pour $n \geq 3$ l'ensemble M des matrices A vérifiant :

$$\forall (i, j) \in [1, n]^2, \quad l_i(A) = c_j(A) = d(A) = a(A)$$

est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$ de dimension $(n-1)^2 - 1$.