

المملكة المغربية
Royaume du Maroc

Ecole Hassania
des Travaux Publics



الدرسة الحسنانية للأشغال العمومية

**CONCOURS D'ACCES EN 1^{ère} ANNEE
POUR LES TITULAIRES DU DEUG EN
SCIENCES OU EQUIVALENT**

MARDI 22 JUILLET 2014

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
(Durée, 3 heures)

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

Le sujet comporte deux problèmes indépendants.

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

PROBLÈME N° 1

Notations et objectifs

Pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 1, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et I_n la matrice identité d'ordre n .

Tout vecteur $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{R}^n$ est identifié à un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne de X soit x_i . Dans toute la suite, nous noterons indifféremment $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ aussi bien que le vecteur de $\mathbb{R}^n$ qui lui est associé.

Selon le contexte, 0 désigne soit le réel nul, soit la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit encore la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique noté $(\cdot | \cdot)_n$ et de la norme associée notée $\|\cdot\|_n$.

Une matrice carrée réelle M sera dite positive si tous ses coefficients sont positifs ou nuls et on notera dans ce cas $M \geq 0$. De même un vecteur X de $\mathbb{R}^n$ sera dit positif si toutes ses composantes x_i sont positives ou nulles et on notera aussi $X \geq 0$. L'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n , positives et symétriques est noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}_+)$.

L'objectif de ce problème est d'étudier des conditions pour lesquelles, étant donnés n nombres réels distincts ou non, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, il existe une matrice carrée réelle d'ordre n positive et symétrique admettant pour valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ comptées avec multiplicité, c'est-à-dire dont le polynôme caractéristique est égal à $\prod_{k=1}^n (\lambda_k - X)$.

Dans la première partie on considérera quelques exemples simples.

Dans la seconde, on montrera que si S est une matrice carrée réelle positive et symétrique de plus grande valeur propre α , alors α est positif, S admet pour la valeur propre α un vecteur propre positif et toute valeur propre λ de S vérifie $|\lambda| \leq \alpha$.

PARTIE I

I.1 Montrer que si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont des réels positifs, distincts ou non, il existe une matrice S carrée réelle positive et symétrique d'ordre n et de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, comptées avec multiplicité.

I.2 a) Soit M une matrice carrée réelle d'ordre 2 admettant -1 et 1 pour valeurs propres. Montrer que son polynôme caractéristique P est donné par $P(X) = X^2 - 1$.

b) En déduire une matrice S carrée réelle positive et symétrique d'ordre 2 admettant pour valeurs propres -1 et 1 .

I.3 Déterminer une matrice S carrée réelle positive et symétrique d'ordre 3 admettant pour valeurs propres $-1, 0$ et 1 .

I.4 Déterminer une matrice S carrée réelle positive et symétrique d'ordre 4 admettant pour valeurs propres comptées avec multiplicité : $-1, -1, 1$ et 1 .

I.5 Montrer qu'il n'existe aucune matrice S carrée réelle positive et symétrique d'ordre 3 admettant pour valeurs propres comptées avec multiplicité : $-1, -1$ et 0 .

I.6 a) Pour a et b réels, on note H la matrice carrée d'ordre n dont les coefficients diagonaux valent tous a et les autres valent tous b . Déterminer les valeurs propres de H .

b) Une matrice carrée réelle symétrique d'ordre n dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles est-elle nécessairement positive ?

PARTIE II

II.1 Soit $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Établir les égalités :

a) $(X | Y)_n = {}^t X Y = {}^t Y X$.

b) ${}^t X S Y = (X | S Y)_n = (S X | Y)_n$.

c) $\|P X\|_n = \|X\|_n$.

II.2 Soit $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$ et $(U, V) \in (\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}))^2$. On note Z et T les matrices de $\mathcal{M}_{n+p,1}(\mathbb{R})$ définies par blocs sous la forme

$$Z = \begin{pmatrix} X \\ U \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} Y \\ V \end{pmatrix}$$

a) Montrer que $(Z | T)_{n+p} = (X | Y)_n + (U | V)_p$.

b) Montrer que si X, Y sont orthogonaux dans $\mathbb{R}^n$ et U, V orthogonaux dans $\mathbb{R}^p$, Z et T sont orthogonaux dans $\mathbb{R}^{n+p}$.

c) La réciproque est-elle vraie ?

Dans la suite de cette partie S désigne une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale semblable à S . On pose $\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$.

II.3 a) Montrer que pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(D Y | Y)_n \leq \alpha \|Y\|_n^2$.

b) En déduire que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $\frac{(S X | X)_n}{\|X\|_n^2} \leq \alpha$.

c) En utilisant une décomposition du vecteur X sur une base orthonormée de vecteurs propres de S , montrer que cette dernière inégalité est une égalité si et seulement si X est vecteur propre de S associé à la valeur propre α .

II.4 Soit $E = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid X \geq 0\}$, $\Sigma = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \|X\|_n = 1\}$ et $C = E \cap \Sigma$.

- Montrer que E est un fermé de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- Montrer que C est un fermé borné de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- Soit $\varphi : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $X \mapsto (SX \mid X)_n$. Donner l'expression de $\varphi(X)$ en fonction des coefficients de S et de ceux de X ; en déduire que φ est continue sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- On pose $\mu = \sup_{X \in C} \varphi(X)$. Justifier l'existence de μ et montrer qu'il existe X_0 appartenant à C tel que $\varphi(X_0) = \mu$.

e) Montrer que $\mu \leq \alpha$.

II.5 On suppose dans cette question $S \geq 0$.

a) Si $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un vecteur propre unitaire de S associé à la valeur propre α , on pose $W = (|x_i|)_{1 \leq i \leq n}$.

i) Montrer que W est élément de C .

ii) Montrer que $|\varphi(X)| \leq \varphi(W)$.

iii) Montrer que $|\alpha| \leq \mu$.

b) En déduire $\alpha \geq 0$, puis que la matrice S admet un vecteur propre positif associé à la valeur propre α .

c) Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $|\lambda_i| \leq \alpha$.

PROBLEME N° 2

Une étude de fonctions

On pose que : $\sigma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma_0 = 0$.

Pour x réel, lorsque cela a du sens, on pose :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}; \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sigma_n x^n}{n!};$$

III.1/ Étude de f .

III.1.1/ Vérifier que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

III.1.2/ Expliciter $xf(x)$ pour tout x réel.

III.1.3/ Expliciter $e^{-x}f(x)$ pour tout x réel.

III.2/ Étude de g .III.2.1/ Montrer que g est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.III.2.2/ On désigne par g' la dérivée de la fonction g ; exprimer $g' - g$ en fonction de f .III.2.3/ Montrer que pour tout x réel :

$$g(x) = e^x \int_0^x e^{-t} f(t) dt.$$

III.4/ La série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $\ln(n)$ le logarithme népérien de n .III.4.1/ Soit $w_k = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{k+1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ III.4.1.1/ Montrer que la série $\sum_{k \geq 1} w_k$ est convergente.III.4.1.2/ En déduire que la suite de terme général $\sigma_n - \ln(n)$ admet une limite finie (que l'on ne demande pas de calculer) lorsque n tend vers $+\infty$.III.4.2/ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\tau_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$; exprimer τ_{2n} en fonction de σ_{2n} et σ_n .III.4.3/ Montrer en utilisant III.4.1 et III.4.2 que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ est convergente et déterminer sa somme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Fin de l'énoncé