

ⵜⴰⴳⴷⴰⵢⵜ ⵏ ⵍⵎⵎⵓⵔ
ⵜⴰⴳⴷⴰⵢⵜ ⵏ ⵍⵎⵎⵓⵔ
ⵏ ⵍⵎⵎⵓⵔ
ⵏ ⵍⵎⵎⵓⵔ



المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

المركز الجهوي لمهن التربية والتكوين

جامعة الرباط-ملا-الغنيمة



Concours d'accès au cycle de préparation à l'agrégation de Mathématiques

Session Juillet 2017

ÉPREUVE D'ANALYSE ET PROBABILITÉ

Durée 4 heures

Le sujet comporte 4 pages, en plus de cette page de garde.

Important

L'épreuve est constituée de quatre exercices. Le candidat est invité à bien mentionner les références complètes de chaque question traitée.

Les candidats sont tenus à rendre deux copies séparées même si elles sont vierges. La première contenant la résolution des deux premiers exercices et la seconde contenant celle des deux derniers exercices. Dans chacune des deux copies on indiquera les références du candidat et le nombre d'intercalaires utilisés.

Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la rigueur de votre raisonnement, de la clarté de la rédaction et du soin apporté à la présentation de votre copie. Le candidat peut utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, il veillera toutefois à mentionner la référence du résultat utilisé.

Si le candidat repère ce qu'il pense être une erreur de l'énoncé, il le signale sur sa copie en expliquant les raisons qui l'ont amené à le penser. Ceci ne doit pas l'empêcher de finir son épreuve et il a le choix d'adopter les rectifications qu'il croit nécessaires ou pas.

Les calculatrices et tout matériel électronique ainsi que les documents sont interdits lors de cette épreuve.



Exercice 1

Toutes les variables aléatoires discrètes de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1– Soient X, Y et Z trois variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.

a) Justifier la convergence de la série de terme général $|\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)|$.

On note

$$d(X, Y) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} |\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)|$$

b) Que dire des variables X et Y lorsque $d(X, Y) = 0$?

Donner un exemple simple de deux variables aléatoires non presque sûrement égales et telles que $d(X, Y) = 0$

c) Prouver l'inégalité $d(X, Z) \leq d(X, Y) + d(Y, Z)$

- 2- a) On pose $A = \{k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) \geq \mathbb{P}(Y = k)\}$. Vérifier l'égalité :

$$d(X, Y) = |\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)|$$

- b) Soit B une partie de $\mathbb{N}$. Prouver l'inégalité :

$$|\mathbb{P}(X \in B) - \mathbb{P}(Y \in B)| \leq d(X, Y).$$

On pourra faire intervenir les parties $B \cap A$ et $B \cap A^c$

- 3- Soit $p \in]0, 1]$. Soient X une variable aléatoire discrète suivant la loi de Bernoulli de paramètre p et Y une variable aléatoire discrète suivant la loi de Poisson de paramètre p .
- a) Justifier pour tout réel x , l'inégalité $e^x \geq 1 + x$
- b) Établir l'égalité $d(X, Y) = p(1 - e^{-p})$ et en déduire la majoration $d(X, Y) \leq p^2$.

Exercice 2

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires considérées sont réelles et discrètes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit $\alpha > 0$. On dit que la variable aléatoire X est α -sous-gaussienne si :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \mathbb{E}[\exp(tX)] \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right)$$

On rappelle la notation : $ch(t) = \frac{\exp(t) + \exp(-t)}{2}$

- 1- Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $ch(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.

Indication : On pourra au préalable montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $2^n n! \leq (2n)!$ puis établir le développement de la fonction ch en série entière sur $\mathbb{R}$.

- 2- Soit $t \in \mathbb{R}$. Démontrer que si $x \in [-1, 1]$, on a l'inégalité de convexité :

$$\exp(tx) \leq \frac{1+x}{2} \exp(t) + \frac{1-x}{2} \exp(-t)$$

- 3- Soit X une variable aléatoire réelle bornée par 1 et centrée. Montrer que X est 1-sous-gaussienne..

Indication : On pourra montrer $\forall t \in \mathbb{R} \quad \mathbb{E}[\exp(tX)] \leq ch(t)$

En déduire que, si X est une variable aléatoire bornée par $\alpha > 0$ et centrée, alors elle est α -sous-gaussienne

- 4- Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et α -sous-gaussiennes, et $\mu_1, \dots, \mu_n$ des nombres réels tels que $\sum_{i=1}^n (\mu_i)^2 = 1$. Montrer que la variable aléatoire $\sum_{i=1}^n \mu_i X_i$ est α -sous-gaussienne.

- 5- Soit X une variable aléatoire α -sous-gaussienne et $\lambda > 0$. Montrer que pour tout $t > 0$:

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right) \quad \textbf{Indication :} \text{ On pourra utiliser l'inégalité de Markov}$$

En déduire que :

$$\mathbb{P}(|X| \geq \lambda) \leq 2 \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right)$$

La suite de l'épreuve est à rédiger séparément !

Exercice 3

On considère la série de fonctions $\sum f_n$, avec :

$$f_0(x) = \frac{1}{x} \text{ et } (\forall n \geq 1) f_n(x) = \frac{2x}{x^2 - n^2}.$$

On note f la fonction somme de cette série.

1- Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, impaire, 1-périodique et qu'elle vérifie :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{Z} \right) \quad 2f(2x) = f(x) + f\left(x + \frac{1}{2}\right) \quad (*).$$

Indication : Poser sous réserve d'existence :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x) = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{x+k}.$$

Pour l'égalité (*) essayer d'abord de prouver que

$$\left(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{Z} \right) \quad 2S_{2n}(2x) = S_n(x) + S_n\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{x+n+\frac{1}{2}}$$

2-a) Montrer que pour tout $a \in]0, \frac{1}{2}[$, $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, 1-a]$.

En déduire que f est continue sur $]0, 1[$.

2-b) Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2-c) Montrer qu'au voisinage de 0 on a :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{\pi^2}{3}x + o(x) = \frac{1}{x} + \mathcal{O}(x) \text{ et } \pi \cotan(\pi x) = \frac{1}{x} + \mathcal{O}(x).$$

2-d) Montrer alors que la fonction $g : x \mapsto f(x) - \pi \cotan(\pi x)$ est prolongeable en une fonction continue sur $[0, 1]$ puis sur $\mathbb{R}$.

3-a) On considère le maximum M de $|g|$ sur $[0, 1]$ supposé atteint en un certain $x_0 \in [0, 1]$.

Prouver que g vérifie (*) puis que $|g(\frac{x_0}{2})| = M$.

Que dire alors de $|g(\frac{x_0}{2^n})|$ pour $n \in \mathbb{N}$?

3-b) Montrer que g est nulle sur $\mathbb{R}$ et expliciter le nombre $f(x)$ en fonction de x quand il existe.

4- En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$:

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(x-n)^2} + \frac{1}{(x+n)^2} \right)$$

Exercice 4

On admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

Soit $f \in C^2([-1, 1], \mathbb{R}_+^*)$.

On suppose que $f(0)$ est un maximum global strict de f sur $[-1, 1]$ avec : $f''(0) < 0$.

1) Montrer que la fonction φ définie sur $[-1, 1] \setminus \{0\}$ par $\varphi : x \mapsto \frac{-1}{x^2} \ln\left(\frac{f(x)}{f(0)}\right)$ est prolongeable par continuité en 0 et déterminer son prolongement $\tilde{\varphi}$.

2) Dédurre en qu'il existe $\alpha > 0$ tel que : $\forall x \in [-1, 1] \quad f(x) \leq f(0)e^{-\alpha x^2}$.

3) En déduire que $\int_{-1}^1 (f(x))^n dx \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \cdot \frac{(f(0))^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{|f''(0)|}}$.

Indication (poser $t = x\sqrt{n}$).

4) Donner un équivalent, lorsque n tend vers $+\infty$, de : $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n dt$ et $v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(n \cos(t)) dt$.