

Epreuve de mathématiques

I. Nombres complexes

Questions préliminaires :

Q1. Les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $(1 + i\sqrt{3})^n$ soit un réel positif sont :

- A. Les multiples de 6 B. Les multiples de 3 C. Les multiples de 4 D. Les multiples de 2

Q2. Soient z et z' deux nombres complexes de module 1 et d'arguments respectifs θ et θ' tels que $zz' \neq -1$. Alors $(z + z')/(1 + zz')$ est un réel de module :

A. $\left \cos\left(\frac{\theta + \theta'}{2}\right) / \cos\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) \right $	B. $\left \cos\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) / \cos\left(\frac{\theta + \theta'}{2}\right) \right $
C. $ \cos(\theta + \theta') / \cos(\theta - \theta') $	D. $ \cos(\theta + \theta') / \cos(\theta - \theta') $

Exercice 1 : Soit $n \geq 1$ et $\omega = e^{2i\pi/n}$.

Q3. Le produit $\prod_{k=0}^{n-1} \omega^k$ des racines n -ièmes de l'unité vaut :

- A. $(-1)^n$ B. $(-1)^{n-1}$ C. $(-1)^{n+1}$ D. $(-1)^{n-2}$

Q4. Soit $p \geq 0$. Alors $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$ vaut :

A. $\begin{cases} n-1, \text{ si } p \text{ est multiple de } n \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$	B. $\begin{cases} n+1, \text{ si } p \text{ est multiple de } n \\ 1, \text{ sinon} \end{cases}$
C. $\begin{cases} n, \text{ si } p \text{ est multiple de } n \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$	D. $\begin{cases} n, \text{ si } p \text{ est multiple de } n \\ 1, \text{ sinon} \end{cases}$

Q5. La somme $\sum_{k=0}^{n-1} (1 + \omega^k)^n$ vaut :

- A. $2n-1$ B. $2n+1$ C. $2n+2$ D. $2n$

II. Limite, continuité, dérivabilité et théorème de Rolle.

Exercice 2 : Soit $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = xE\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

Q6. La limite de f en 0, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, vaut :

- A. 1 B. -1 C. 0 D. n'existe pas

Exercice 3 : Soient a et b deux réels. Soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ e^{bx} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Q7. La limite de $\frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$ en 0, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$, vaut :

- A. 1 B. 0 C. -1 D. n'existe pas

Q8. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ pour :

A. $a = 2$ et $b = 1$	B. $a = 2$ et b quelconque
C. $a = 1$ et b quelconque	D. a et b réels quelconques

Q9. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ pour :

A. $a = 1$ et $b = 1$	B. $a = 2$ et $b = 2$	C. $a = 1$ et $b = 2$	D. $a = 2$ et $b = 1$
-----------------------	-----------------------	-----------------------	-----------------------

Exercice 4 : Soit $h_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h_n(x) = x^n \sin(\pi x)$.

Q10. Cochez la bonne réponse :

A. il existe $\alpha_n \in]0,1[$ tel que $h_n^{(3)}(\alpha_n) = 0$	B. il existe $\alpha_n \in]0,1[$ tel que $h_n''(\alpha_n) = 0$
C. il existe $\alpha_n \in]0,1[$ tel que $h_n'(\alpha_n) = 0$	D. il existe $\alpha_n \in]0,1[$ tel que $h_n^{(n)}(\alpha_n) = 0$

Q11. L'expression de $h_n(\alpha_n)$ en fonction de α_n , n et $\cos(\pi\alpha_n)$ est :

A. $-\pi \frac{\alpha_n^n}{n} \cos(\pi\alpha_n)$	B. $-\pi \frac{\alpha_n^{n+1}}{n} \cos(\pi\alpha_n)$	C. $-\pi \frac{\alpha_n^n}{n+1} \cos(\pi\alpha_n)$	D. $-\pi \frac{\alpha_n^{n+1}}{n+1} \cos(\pi\alpha_n)$
--	--	--	--

Q12. La limite de $h_n(\alpha_n)$ lorsque n tend vers l'infini, $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(\alpha_n)$, est :

A. -1	B. 1	C. 0	D. n'existe pas
-------	------	------	-----------------

III. Développement Limité

Exercice 5 : Soit u la fonction définie sur $] -1,1[$ par

$$u(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

Q13. Soit la fonction $a:] -1,1[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in] -1,1[$:

$$u'(x) + a(x) \cdot u(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

La fonction $a(x)$ vaut alors :

A. $a(x) = \frac{x}{1+x^2}$	B. $a(x) = \frac{-x}{1-x^2}$	C. $a(x) = \frac{x}{1-x^2}$	D. $a(x) = \frac{-x}{1+x^2}$
-----------------------------	------------------------------	-----------------------------	------------------------------

Q14. Un développement limité à l'ordre 4 en 0 de a vaut :

A. $x - x^3 + o(x^4)$	B. $-x - x^3 + o(x^4)$	C. $x + x^3 + o(x^4)$	D. $-x + x^3 + o(x^4)$
-----------------------	------------------------	-----------------------	------------------------

Q15. Un développement limité à l'ordre 5 en 0 de u vaut :

A. $x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{8}{15}x^5 + o(x^5)$	B. $x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{8}{15}x^5 + o(x^5)$	C. $1 + x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{8}{15}x^5 + o(x^5)$	D. $x^2 + x^4 + \frac{8}{15}x^5 + o(x^5)$
--	--	--	---

IV. Equations différentielles

Exercice 6 : On se propose d'intégrer sur l'intervalle le plus grand possible contenu dans $]0, +\infty[$ l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2.$$

Q16. Soit $\beta \in]0, +\infty[$ tel que $y(x) = \beta x$ soit une solution particulière y_0 de (E) . La valeur de β est alors :

A. $\sqrt{3}$	B. $\frac{1}{3}$	C. 3	D. $\frac{1}{\sqrt{3}}$
---------------	------------------	------	-------------------------

Q17. On effectue le changement de fonction inconnue : $y(x) = y_0(x) = \frac{1}{v(x)}$. Ce changement transforme l'équation (E) en l'équation différentielle (E_1) suivante :

A. $(E_1) \quad v'(x) + \left(6x - \frac{1}{x}\right)v(x) = 1$	B. $(E_1) \quad v'(x) + \left(6x + \frac{1}{x}\right)v(x) = 1$
C. $(E_1) \quad v'(x) + \left(6x + \frac{1}{x}\right)v(x) = -1$	D. $(E_1) \quad v'(x) + \left(6x - \frac{1}{x}\right)v(x) = -1$

Q18. Les solutions de l'équation (E_1) sur $]0, +\infty[$ sont alors :

A. $v(x) = \frac{1 + \alpha \cdot \exp(-\sqrt{3}x^2)}{6x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$	B. $v(x) = \frac{1 + \alpha \cdot \exp(-3x^2)}{6x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$
C. $v(x) = \frac{1 + \alpha \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{3}\right)}{6x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$	D. $v(x) = \frac{1 + \alpha \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right)}{6x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

Q19. Les solutions $y(x)$ de l'équation (E) sont alors :

A. $y(x) = 3x$ ou $y(x) = 3x - \frac{6x}{1 + \alpha \cdot \exp(-3x^2)}$	avec $\alpha > -1$
B. $y(x) = \sqrt{3}x$ ou $y(x) = \sqrt{3}x - \frac{6x}{1 + \alpha \cdot \exp(-\sqrt{3}x^2)}$	avec $\alpha > -1$
C. $y(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ ou $y(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{6x}{1 + \alpha \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right)}$	avec $\alpha > -1$
D. $y(x) = \frac{1}{3}x$ ou $y(x) = \frac{1}{3}x - \frac{6x}{1 + \alpha \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{3}\right)}$	avec $\alpha > -1$

V. Primitive et Fractions rationnelles

Exercice 7 : soit

$$f(x) = \frac{5x^2 + 21x + 22}{(x-1)(x+3)^2} \quad x \in]1, +\infty[$$

Q20. Les trois réels a , b et c tels que

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2}$$



valent respectivement :

A. $a = 3, b = 2$ et $c = -1$	B. $a = 2, b = 3$ et $c = -1$	C. $a = 3, b = -1$ et $c = 2$	D. $a = -1, b = 2$ et $c = 3$
----------------------------------	----------------------------------	----------------------------------	----------------------------------

Q21. La primitive de f sur $]1, +\infty[$ qui s'annule en 2 vaut :

A. $3 \ln(x-1) + 2 \ln(x+3) + \frac{1}{x+3} - 2 \ln 5 - \frac{1}{5}$	B. $2 \ln(x-1) + 3 \ln(x+3) + \frac{1}{x+3} - 3 \ln 5 - \frac{1}{5}$
C. $3 \ln(x-1) + 1 \ln(x+3) + \frac{2}{x+3} - \ln 5 - \frac{2}{5}$	D. $\ln(x-1) + 2 \ln(x+3) + \frac{3}{x+3} - 2 \ln 5 - \frac{3}{5}$

VI. Matrices et suites

Exercice 8 : Soit

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } G = F - I.$$

Q22. La matrice G^n pour tout $n \geq 3$ vaut :

A. F	B. 0	C. I	D. F^2
--------	--------	--------	----------

Q23. La matrice F^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ vaut :

A. $\begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n^2}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	B. $\begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	C. $\begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	D. $\begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
---	--	--	--

Exercice 9.

Q24. Pour $n \geq 2$, le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$ vaut :

A. $(2^n - 2)X + 2 - 2^n$	B. $(2^n - 2)X + 1 - 2^n$	C. $(2^n - 1)X + 2 - 2^n$	D. $(2^n - 1)X + 1 - 2^n$
------------------------------	------------------------------	------------------------------	------------------------------

Q25. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, la matrice M^n vaut alors :

A. $(2^n - 2)M + (2 - 2^n)I_3$	B. $(2^n - 2)M + (1 - 2^n)I_3$
C. $(2^n - 1)M + (2 - 2^n)I_3$	D. $(2^n - 1)M + (1 - 2^n)I_3$

Exercice 10 : Soient (a_n) , (b_n) et (c_n) trois suites réelles telles que $a_0 = 1$, $b_0 = 2$, $c_0 = 7$ et vérifiant les relations de récurrences

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 3b_n + c_n \\ c_{n+1} = 3c_n \end{cases}$$

On souhaite exprimer a_n , b_n et c_n uniquement en fonction de n .



Epreuve de mathématiques



On considère le vecteur colonne $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. La matrice H telle que $X_{n+1} = HX_n$ vaut :

A.	B.	C.	D.
$\begin{pmatrix} 3n & 1 & 0 \\ 0 & 3n & 1 \\ 0 & 0 & 3n \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} n & 1 & 0 \\ 0 & n & 1 \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Q27. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les matrices N^2 et N^3 valent respectivement :

A.	B.	C.	D.
$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Q28. La matrice H^n vaut alors :

(Indication : Ecrire H en fonction des matrices I et N et appliquer la formule du binôme)

A.	B.
$\begin{pmatrix} n^3 & 3^{n-1} \times n & 3^{n-2} \times \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & n^3 & 3^{n-1} \times n \\ 0 & 0 & n^3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3^n & 3^{n-1} \times n & 3^{n-2} \times \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 3^n & 3^{n-1} \times n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$
C.	D.
$\begin{pmatrix} n^3 & 3^n \times (n-1) & 3^{n-2} \times \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & n^3 & 3^{n-1} \times (n-1) \\ 0 & 0 & n^3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3^n & 3^{n-1} \times n & 3^{n-1} \times \frac{n^2}{2} \\ 0 & 3^n & 3^{n-1} \times n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

Q29. Les termes généraux a_n , b_n et c_n en fonction de n valent respectivement :

(Indication : $X_n = H^n \cdot X_0$)

A.	B.
$a_n = n^3 + 2 \cdot 3^{n-1} \cdot n + 7 \cdot 3^{n-2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}$ $b_n = 2 \cdot n^3 + 7 \cdot 3^{n-1} \cdot n$ $c_n = 7 \cdot n^3$	$a_n = 3^n + 2 \cdot 3^{n-1} \cdot n + 7 \cdot 3^{n-2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}$ $b_n = 2 \cdot 3^n + 7 \cdot 3^{n-1} \cdot n$ $c_n = 7 \cdot 3^n$
C.	D.
$a_n = n^3 + 2 \cdot 3^n \cdot (n-1) + 7 \cdot 3^{n-2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}$ $b_n = 2 \cdot n^3 + 7 \cdot 3^{n-1} \cdot (n-1)$ $c_n = 7 \cdot n^2$	$a_n = 3^n + 2 \cdot 3^{n-1} \cdot n + 7 \cdot 3^{n-1} \cdot \frac{n^2}{2}$ $b_n = 2 \cdot 3^n + 7 \cdot 3^{n-1} \cdot n$ $c_n = 7 \cdot 3^n$

