



« Les Risques Financiers et Assurantiels »

Test écrit de Mathématiques-Probabilité-Statistiques

Durée : 2 h

Année 2012-2013

NB : Seule la calculatrice est autorisée

Partie 1 : Mathématiques :

Exercice n°1 : Soit l'ensemble F défini par

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa dimension.

Exercice n°2 : Soit f l'application définie de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + y + z, 3x + 2y)$$

- 1) Montrer que f est une application linéaire.
- 2) Chercher la matrice M associée à f par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- 3) Déterminer le noyau de f et chercher sa dimension.
- 4) Dédire la dimension de l'image de f .

Exercice n°3 : On considère la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n \times 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Exercice n°4 : Pour quelles valeurs du paramètre réel m la matrice suivante est-elle inversible ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 2 & m-1 \end{pmatrix}$$

Partie 2 : Probabilité et Statistique

Exercice 1: Calcul des probabilités

Un inspecteur d'une compagnie d'assurance rend visite aux parents de nouveau-nés. La probabilité que cette visite se termine par la conclusion d'un nouveau contrat est de 10%. Dans tous les cas, il rend visite une nouvelle fois aux parents et leur propose un autre type de contrat. Dans ce cas la probabilité d'obtenir un contrat est de 15%. Quelle est la probabilité pour que l'un ou l'autre des deux contrats soit signé? On notera $p(C_i)$, la probabilité pour que le contrat i soit signé.

Exercice 2: Loi de probabilité discrète

Dans une population d'étudiants de master, 50% sont équipés d'un ordinateur fixe, 30% possèdent un ordinateur portable et 20% n'ont pas d'ordinateur. Aucun d'eux n'a les deux types d'ordinateurs. Si dix étudiants ont été pris au hasard:

- 1- Quelle est la probabilité pour que la moitié des étudiants possède un ordinateur fixe?
- 2- Quelle est la probabilité pour que tous les étudiants aient un ordinateur?
- 3- L'Etat décide d'offrir un ordinateur portable à chaque étudiant de master qui n'en possède pas et sachant que le nombre des étudiants en master est de 600, quel serait le budget moyen consacré à cette opération? Un ordinateur portable coûte 10 000 Dh.

Exercice 3 : Loi de probabilité continue

Une entreprise fabrique, en grande quantité, des tiges métalliques cylindriques pour l'industrie. Leur longueur et leur diamètre sont exprimés en millimètres (mm). Une tige de ce type est considérée conforme pour la longueur lorsque celle-ci appartient à l'intervalle $[99,45\text{mm}; 100,55\text{mm}]$.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque tige prélevée dans la production, associe sa longueur. On suppose que X suit la loi normale de moyenne 100 et d'écart-type 0,25.

1. Calculer la probabilité qu'une tige prélevée au hasard dans la production soit conforme pour la longueur.
2. Calculer la probabilité qu'une tige prélevée au hasard dans la production ait une longueur comprise entre 99,51 et 100,49 millimètres.
3. Calculer la probabilité qu'une tige prélevée au hasard dans la production ait une longueur supérieure à 100,5775 millimètres.

Exercice 4 : Loi de probabilité continue

Soit X une variable aléatoire désignant les notes des étudiants du master. X suit une loi normale de paramètres m et σ . Déterminer les paramètres m et σ sachant que la probabilité d'avoir une note inférieure à 16 est égale à 0,8413 et celle d'avoir une note inférieure à 18 est 0,9772.

Exercice 5: Estimation et tests

On a relevé dans le tableau suivant les résultats de 10 pesées d'un même objet:

Masse (g)	72,20	72,24	72,26	72,30	72,36	72,39	72,42	72,48	72,50	72,54
-----------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

On note X la variable aléatoire représentant la masse d'un objet.

- 1- L'écart type σ_e de l'échantillon de la masse de cet objet est égal à 0.11g. Calculer la masse moyenne de l'échantillon.
- 2- En déduire des estimations ponctuelles de la moyenne m et de l'écart type de la variable X .
- 3- On admet que la variable aléatoire X suit une loi normale. En prenant pour écart type la valeur estimée dans la question 2; donner un intervalle de confiance au seuil de 5% de la moyenne m .
- 4- Soit un autre échantillon de 36 pesées, la masse moyenne est égale à 72,04 gramme. L'écart type σ estimé est égal 0.16 g. Peut-on affirmer au seuil de signification de 1% que la masse moyenne est différente de 72 grammes?

FONCTION DE RÉPARTITION DE LA LOI NORMALE REDUITE

Cette table donne pour $u \geq 0$, la valeur $P = F(u)$ de la fonction de répartition de la loi normale réduite telle que :

$$P = F(u) = \int_{-\infty}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Pour $u < 0$: $P = F(u) = 1 - F(-u)$.

u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986



CONCOURS

MASTER GESTION DES RISQUES FINANCIERS ET ASSURANTIELS (GRFA)

Durée : 1 heure

Sujet : La crise financière internationale : les causes et les conséquences sur le plan économique et social