

ROYAUME DU MAROC



Ministère de l'Éducation Nationale
et de la Formation Professionnelle

Concours d'Entrée en Première Année du Cycle de Préparation
À l'Agrégation de Sciences Physiques
Option : Physique
Session : Juillet- 2014

ÉPREUVE DE PHYSIQUE II

Durée : 4 heures

Cette épreuve comporte 13 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *autorisé*

L'énoncé de cette épreuve comporte 13 pages. Il est constitué de deux problèmes totalement indépendants.

L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé.

On veillera à une présentation claire et soignée des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les **références** des questions abordées.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Premier problème Électromagnétisme

Le problème d'électromagnétisme comprend trois parties.

Données :

- En coordonnées cylindriques (figure 1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z \\ \text{div} \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \text{rot} \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\theta \\ \quad + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z \end{array} \right.$$

- $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$
- $\text{div}(f \cdot \vec{A}) = f \cdot \text{div}(\vec{A}) + \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f$
- $\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}$
- $\overrightarrow{\text{rot}}(f \cdot \vec{A}) = f \cdot \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) + \overrightarrow{\text{grad}} f \wedge \vec{A}$
- $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{A} \text{div}(\vec{B}) - \vec{B} \text{div}(\vec{A}) + (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{B}$

1^{ère} partie

Définitions

1.1. Loi de Biot et Savart

On considère une distribution filiforme de courant dans le vide représentée sur la Figure 2, où nous avons porté le vecteur unitaire $\vec{u}$ sur $\overrightarrow{PM}$.

1.1.1. Exprimer le champ magnétique $d\vec{B}(M)$, créé en M par l'élément $d\vec{l}$ du courant d'intensité I pris autour de P.

1.1.2. En déduire le champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé en M par le circuit filiforme (C).

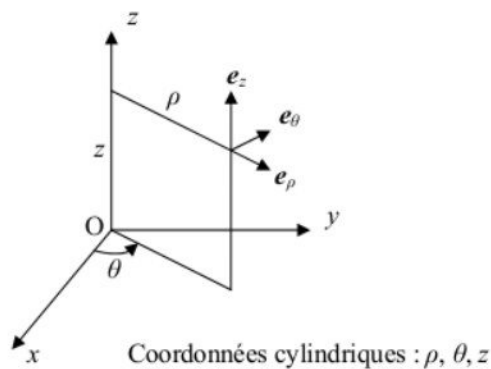


Figure 1:

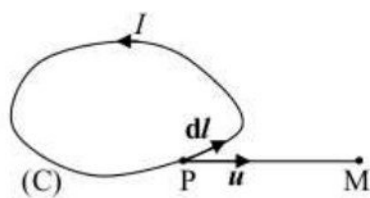


Figure 2:

1.2. Théorème d'Ampère

- 1.2.1. Énoncer et formuler le théorème d'Ampère sous sa forme intégrale.
- 1.2.2. Appliquer le théorème d'Ampère au cas des courants représentés sur la Figure 3.

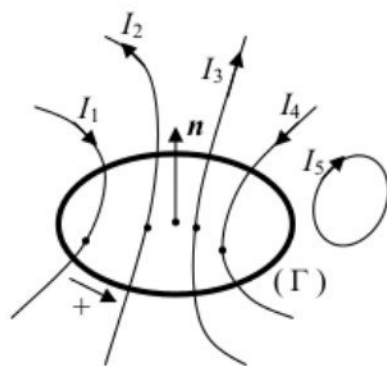


Figure 3:

2^{ème} partie

Champ magnétique et potentiel vecteur

Les coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) seront utilisées dans ce paragraphe.

2.1. Expressions du champ magnétique et du potentiel vecteur

2.1.1. Montrer que, dans le cas d'un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, en tout point M de l'espace tel que $\vec{OM} = \vec{r}$, le champ de vecteur défini par $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \wedge \vec{r}$ est un potentiel vecteur pour $\vec{B}$.

2.1.2. Calculer $\text{rot}(\vec{B})$, puis $\text{rot}(\vec{r})$ et en déduire la valeur de $\text{div} \vec{A}$.

2.2. Courant rectiligne

Un conducteur rectiligne cylindrique illimité, de rayon R, d'axe de révolution $z'z$, est parcouru par un courant volumique $\vec{j}$ uniforme et dirigé de z' vers z . Un point M de l'espace est repéré par ses coordonnées cylindriques (Figure 4).

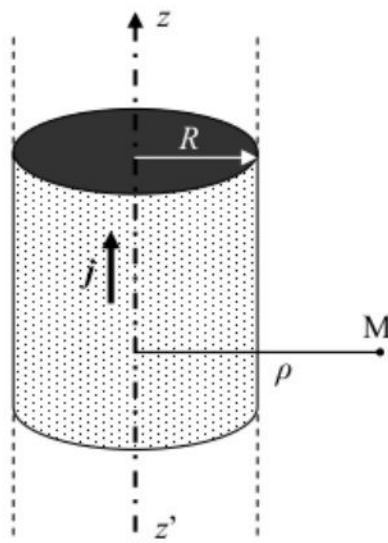


Figure 4:

2.2.1. A l'aide des propriétés de symétrie examiner les éléments de symétrie et d'invariance de ce conducteur cylindrique qui ont une conséquence sur les modules et directions du champ magnétique $\vec{B}(M)$ et du potentiel vecteur $\vec{A}(M)$.

2.2.2. Déterminer, en appliquant le théorème d'Ampère, le champ magnétique $\vec{B}(M)$ en tout point M intérieur et extérieur au conducteur. Nous poserons $\vec{B} = \vec{B}_{\text{int}}$ pour $\rho < R$ et $\vec{B} = \vec{B}_{\text{ext}}$ pour $\rho > R$. Tracer l'allure de la courbe de $B(\rho)$, où $B = \|\vec{B}\|$.

2.2.3. En déduire le potentiel vecteur $\vec{A}$ en tout point M intérieur ($\vec{A}_{\text{int}}$) et extérieur ($\vec{A}_{\text{ext}}$) au conducteur, à partir de la relation locale champ-potential sachant que $A(R) = 0$, condition posée arbitrairement. Tracer l'allure de la courbe de $A(\rho)$.

2.2.4. Le potentiel $\vec{A}(M)$ pouvait-il se calculer à partir de la relation précédente $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \wedge \vec{r}$? Justifier votre réponse.

2.3. Courant circulaire

2.3.1. Une spire plane circulaire de centre O, d'axe z'Oz, de rayon a est parcourue par un courant stationnaire d'intensité I. En un point M₀ de son axe, la spire est vue sous un angle de 2(π - α) (Figure 5).

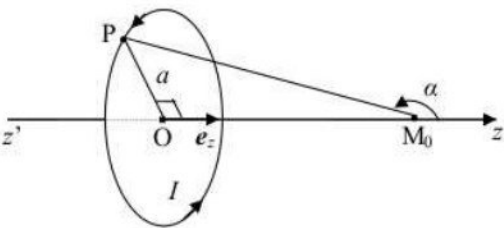


Figure 5:

2.3.1.1. D'après les éléments de symétrie et d'invariance de la spire de courant, définir les variables dont dépendent le champ magnétique $\vec{B}(M_0)$ et le potentiel vecteur $\vec{A}(M_0)$ ainsi que leurs directions.

2.3.1.2. Calculer, à l'aide de la loi de Biot-Savart, le champ magnétique au point M₀ et le mettre sous la forme : $\vec{B}(M_0) = \vec{B}(O)f(\alpha)$ où $\vec{B}(O)$ représente le champ magnétique au centre de la spire et f(α) une fonction trigonométrique de l'angle α.

2.3.1.3. Exprimer le potentiel vecteur $d\vec{A}(M_0)$ pour tout point M₀ de l'axe z'Oz, dû à un élément $d\vec{l}$ de la spire, parcouru par un courant d'intensité I. En déduire $\vec{A}(M_0)$. Ce résultat est-il compatible avec l'étude menée en (2.3.1.1.) pour $\vec{A}(M_0)$?

2.3.2. Un solénoïde de longueur finie L, d'axe z'z est constitué de spires coaxiales jointives, de rayon R et parcourues dans le même sens par un courant stationnaire d'intensité I. L'origine des coordonnées cylindriques est prise au milieu du solénoïde, et l'on désigne par n le nombre de spires par unité de longueur (Figure 6).

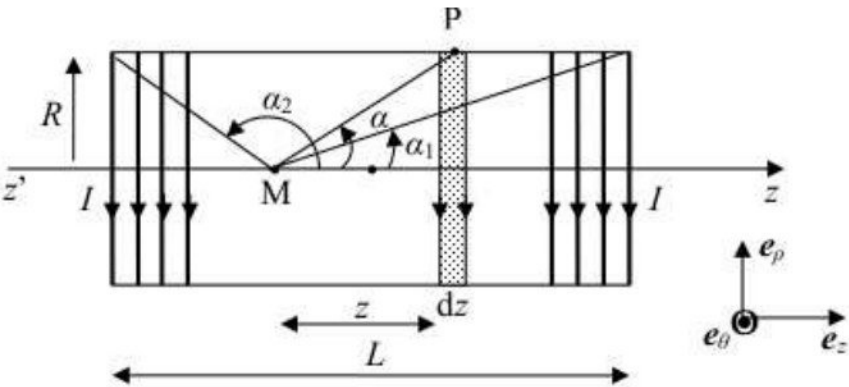


Figure 6:

2.3.2.1. Exprimer le champ magnétique $d\vec{B}(M)$ créé par l'élément de solénoïde d'épaisseur dz.

2.3.2.2. En déduire le champ magnétique $\vec{B}(M)$ pour tout point M de l'axe du solénoïde, sachant que les spires des extrémités du solénoïde sont vues du point M sous les angles 2α₁ et

$$2(\pi - \alpha_2).$$

2.3.3. Un solénoïde dont la longueur L est très grande devant le rayon R des spires est qualifié de "solénoïde infini".

2.3.3.1. Utiliser le résultat précédent pour exprimer le champ magnétique en tout point M de l'axe du "solénoïde infini".

2.3.3.2. Soit T un point quelconque à l'intérieur du solénoïde et situé à la distance ρ de l'axe ($\rho < R$) (Figure 7). Par application du théorème d'Ampère au contour rectangulaire $OTT'O'O$ de longueur $OO' = l$ sur l'axe, évaluer le champ magnétique $\vec{B}_{\text{int}}$ pour tout point T intérieur.

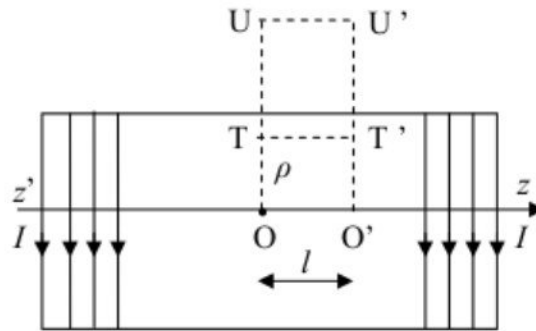


Figure 7:

2.3.3.3. Soit U un point quelconque à l'extérieur du solénoïde, à la distance ρ de l'axe ($\rho > R$) (Figure 7). Par un raisonnement analogue au précédent, appliqué au contour rectangulaire $OUU'O'O$, en déduire le champ magnétique $\vec{B}_{\text{ext}}$ pour tout point U extérieur.

2.3.3.4. Calculer les potentiels vecteurs $\vec{A}_{\text{int}}$ pour tout point T intérieur ($\rho < R$) et $\vec{A}_{\text{ext}}$ pour tout point U extérieur ($\rho > R$).

2.3.3.5. Les potentiels $\vec{A}_{\text{int}}$ et $\vec{A}_{\text{ext}}$ pouvaient-ils se calculer à partir de la relation précédente $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \wedge \vec{r}$? Justifier votre réponse.

2.3.3.6. Tracer les graphes de $B(\rho)$ et $A(\rho)$ des normes du champ magnétique et du potentiel vecteur respectivement.

3^{ème} partie

Induction électromagnétique

3.1. Loi de Lenz, Loi de Faraday

Une spire plane circulaire de centre O , de rayon a ($a < R$), est placée perpendiculairement au champ magnétique à l'intérieur du "solénoïde infini". Les spires jointives de rayon R du solénoïde sont parcourues par le courant variable $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$ (Figure 8).

3.1.1. Déterminer la force électromotrice (f.é.m) induite dans la spire en utilisant :

3.1.1.1. la loi de Faraday.

3.1.1.2. Le champ local induit : $\vec{E}_{\text{ind}} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$.

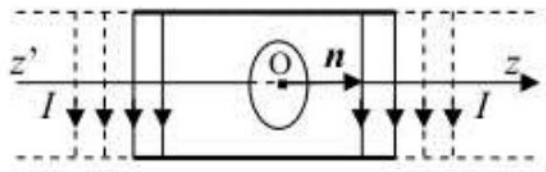


Figure 8:

3.1.2. En déduire l'intensité $i(t)$ du courant induit circulant dans la spire de résistance r . Préciser le sens du courant dans la spire.

La spire, placée à l'intérieur du " solénoïde infini ", tourne maintenant autour d'un axe fixe de son plan à une vitesse angulaire constante ω .

3.1.3. Un courant stationnaire d'intensité I circule dans les spires jointives de rayon R du solénoïde et crée un champ magnétique $\vec{B}_{\text{int}}$ (Figure 9). Calculer l'intensité $i(t)$ du courant dans la spire, de résistance r , lors de sa rotation.

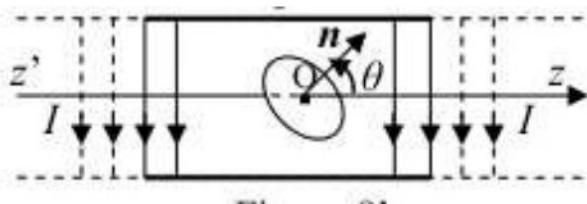


Figure 9:

3.1.4. Déterminer le champ magnétique variable $\vec{B}_{\text{int}}$ qui annule, à chaque instant, le courant dans la spire dans les cas suivants :

3.1.4.1. $\vec{B}_{\text{int}}$ a la direction constante de l'axe $z'Oz$ et un module variable.

3.1.4.2. $\vec{B}_{\text{int}}$ a un module constant et une direction variable. On négligera l'inductance propre du circuit.

3.2. La roue de Barlow

Le circuit représenté en Figure 10 comprend, dans un montage en série : une roue de Barlow, un résistor de résistance R , un condensateur de capacité C et un interrupteur K . Cette roue de Barlow, disque conducteur homogène de centre O , de rayon a , de moment d'inertie J par rapport à son axe de rotation, est soumise à un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ parallèle à l'axe de la roue. Un point P de sa périphérie est en contact avec un bain de mercure pour assurer le passage du courant tout en minimisant les actions mécaniques de frottement que l'on négligera. On suppose la roue parfaitement conductrice.

La roue est lancée avec une vitesse angulaire initiale ω_0 . A l'instant de fermeture de K , $t = 0$, le condensateur porte la charge initiale q_0 sur la plaque reliée au résistor.

3.2.1. Parmi la répartition quelconque des lignes de courant entre O et P , nous représentons sur la Figure 10, celle qui passe par un point M en transportant un courant d'intensité di .

3.2.1.1. Exprimer la force de Laplace $d^2\vec{f}$ sur un élément $d\vec{l}$ de cette ligne de courant.

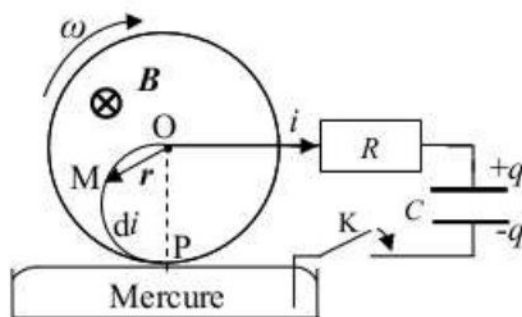


Figure 10:

3.2.1.2. Déterminer le moment $\vec{\Gamma}$, en O, des forces électromagnétiques agissant sur la roue en fonction de a , i et $\vec{B}$. Commenter le résultat obtenu.

3.2.1.3. Exprimer la force électromotrice induite en fonction de a , $\vec{\omega}$ et $\vec{B}$.

3.2.2. Établir les équations mécanique du mouvement de la roue et électrique du circuit. En déduire les lois d'évolution dans le temps de :

3.2.2.1. l'intensité $i(t)$ que l'on mettra sous la forme : $i(t) = i_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$. Déterminer i_0 et τ en fonction de a , J , R , C , q_0 , $B = \|\vec{B}\|$ et $\vec{\omega}_0 \cdot \vec{B}$.

3.2.2.2. la charge $q(t)$ du condensateur sachant que $q(0) = q_0$.

3.2.2.3. la vitesse angulaire $\omega(t)$ de la roue avec $\omega(0) = \omega_0$.

3.2.3. Quand t devient très grand, $q(t)$ et $\omega(t)$ tendent respectivement vers q_∞ et ω_∞ . Expliciter q_∞ et ω_∞ en fonction de a , J , q_0 , C , B et ω_0 .

3.2.4. On fixe la vitesse angulaire initiale à la valeur ω_0 de telle façon que $\vec{\omega}_0 \cdot \vec{B} < 0$.

3.2.4.1. Montrer que la roue se comporte initialement comme un générateur pour toute valeur de $q_0 < 0$.

3.2.4.2. A partir de quel instant t_r , celle-ci deviendra-t-elle un récepteur ?

Deuxième problème Optique

Le problème d'optique comprend deux parties totalement indépendantes.

La vitesse de la lumière dans le vide est notée $c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

1^{ère} partie

Interférences

Les grandeurs harmoniques seront représentées en notation complexe.

Une source lumineuse ponctuelle située en S émet, de manière pulsée, des trains d'ondes lumineuses supposées de même pulsation ω . Dans le modèle scalaire de la lumière, la fonction de l'onde monochromatique est caractérisée en un point M et à l'instant t par le signal lumineux

ou vibration lumineuse : $s(M, t) = a \cos[\omega t - \varphi(M, t)]$, où a est l'amplitude supposée constante de l'onde et $\varphi(M, t)$ son retard de phase en M et à l'instant t par rapport au point de référence S .

Par convention, la grandeur complexe associée à la grandeur réelle $s(M, t)$ est le signal analytique : $\underline{s}(M, t) = a \exp[j(\omega t - \varphi(M, t))]$, où j est le nombre complexe pour lequel $j^2 = -1$. Le complexe conjugué de $s(M, t)$ est noté $\underline{s}^*(M, t)$.

Le modèle des trains d'ondes suppose que la phase à la source φ_S reste constante pendant des intervalles de temps de durée constante τ_C entre lesquels elle change aléatoirement de valeur. L'onde émise durant cet intervalle de temps appelé temps de cohérence est nommée "train d'onde". Le train d'onde est ainsi limité dans le temps et se propage dans le vide à la célérité c . Ce temps de cohérence est la durée moyenne de passage des trains d'ondes en un point donné de l'espace. La phase de l'onde φ_S à la source S prend une nouvelle valeur aléatoire à chaque nouveau train d'onde.

1.1. Rayon lumineux

La lumière se propage de S à M le long d'un rayon lumineux avec pour vitesse au point P : $v(P) = \frac{c}{n(P)}$, où $n(P)$ est l'indice de réfraction du milieu en P ; par définition, le chemin optique (SM) entre les points S et M du rayon lumineux est : $(SM) = \int_S^M n(P) dl(P)$. L'élément d'arc de la courbe suivie par la lumière est noté $dl(P)$; il est défini en P et est parcouru par la lumière à la vitesse de propagation $v(P)$ pendant la durée dt .

1.1.1. Chemin optique et phase du signal lumineux

L'onde se propage sans déformation, le signal $s(M, t)$ reproduit le signal de la source avec un retard $\tau(M)$.

1.1.1.1. Définir la durée de propagation $\tau(M)$ du signal depuis la source en utilisant une intégrale. En déduire que $\tau(M)$ s'écrit en fonction du chemin optique (SM) dont l'expression est donnée précédemment.

1.1.1.2. Calculer la pulsation du signal lumineux pour une longueur d'onde moyenne dans le vide pour la lumière visible égale à $\lambda_m = 600 \text{ nm}$.

1.1.1.3. Établir l'expression du retard de phase $\varphi_{P \rightarrow M} = \varphi(M, t) - \varphi(P, t)$ lié à la propagation entre P et M , en faisant intervenir le temps de propagation de P à M et d'autre(s) grandeur(s) caractéristique(s) de l'onde. En déduire $\varphi_{P \rightarrow M}$ en fonction du chemin optique (PM) et de la longueur d'onde λ_0 de l'onde étudiée dans le vide

1.1.2. Surface d'onde

1.1.2.1. Définir une surface d'onde en optique (la source est ponctuelle). En partant de la définition de (SM) fournie plus haut, justifier le caractère d'onde sphérique associé au signal lorsque celui-ci se propage dans un milieu d'indice n constant. Énoncer le théorème de Malus.

1.1.2.2. Quel instrument d'optique permet d'obtenir une onde plane à partir d'une source ponctuelle ? Illustrer votre réponse à l'aide d'un schéma faisant apparaître les surfaces d'onde.

L'éclairement (ou intensité lumineuse) $\mathcal{E}(M)$ est mesuré par un détecteur quadratique placé en M sensible à la valeur moyenne temporelle de $s^2(M, t)$. Il est conventionnellement défini au point M (à une constante multiplicative près) par :

$$\mathcal{E}(M) = \langle \underline{s}(M, t) \underline{s}^*(M, t) \rangle = \langle |\underline{s}(M, t)|^2 \rangle$$

Cette moyenne temporelle est effectuée sur un temps de réponse τ_R du détecteur.

1.2. Interférences entre deux sources ponctuelles

L'éclairement $\mathcal{E}(M)$ résulte de la superposition en M de deux ondes issues de deux sources ponctuelles S_1 et S_2 de longueurs d'ondes dans le vide différentes λ_1 et λ_2 . Elles sont notées

respectivement :

$$s_1(M, t) = a_1 \cos[\omega_1 t - \varphi_1(M, t)] \text{ et } s_2(M, t) = a_2 \cos[\omega_2 t - \varphi_2(M, t)]$$

1.2.1. Exprimer l'éclairement $\mathcal{E}(M)$ en fonction des intensités $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ de chacune des ondes, de leurs pulsations respectives ω_1 et ω_2 et du déphasage $\phi_{2/1}(M, t) = \varphi_2(M, t) - \varphi_1(M, t)$ retard de l'onde issue de S_2 par rapport à l'onde issue de S_1 . Identifier le terme d'interférences.

1.2.2. A quelle condition, relative au terme d'interférence, observe-t-on des interférences lumineuses en M ? Les ondes sont alors dites cohérentes. Que vaut l'éclairement $\mathcal{E}(M)$ pour des ondes incohérentes ? Que peut-on dire dans ce cas de l'éclairement observé sur un écran ?

1.2.3. Il est impossible d'observer des interférences entre deux sources de pulsations différentes. Justifier avec précision.

1.2.4. Dans le cas général $\tau_R \gg \tau_C$ (on suppose les temps de cohérence temporelle des sources identiques). On se place ici dans le cas très particulier (l'expérience est difficilement réalisable) de deux sources monochromatiques de longueurs d'onde très proches et ayant un temps de cohérence très important (on supposera ici uniquement $\tau_C > \tau_R$). Quel phénomène pourra-t-on observer. Justifier.

L'éclairement résulte maintenant de la superposition en M de deux ondes issues de deux sources ponctuelles S_1 et S_2 de même longueur d'onde λ_0 . Elles sont notées respectivement : $s_1(M, t) = a_1 \cos[\omega_0 t - \varphi_1(M, t)]$ et $s_2(M, t) = a_2 \cos[\omega_0 t - \varphi_2(M, t)]$

1.2.5. Déterminer le déphasage $\phi_{2/1}(M, t) = \varphi_2(M, t) - \varphi_1(M, t)$ en fonction de la longueur d'onde dans le vide λ_0 , de la différence de chemin optique notée $\delta_{2/1}(M) = (S_2 M) - (S_1 M)$ et des phases φ_{S1} et φ_{S2} des signaux émis aux points sources S_1 et S_2 . Pourquoi le déphasage $\phi_{2/1}(M, t)$ dépend-il du temps ?

1.2.6. Deux ondes de même pulsation ω_0 donnent-elles nécessairement des interférences ? Pour répondre à cette question, on reviendra à l'étude du terme d'interférences. Pour des ondes lumineuses parfaitement cohérentes, l'évolution de l'éclairement est défini en fonction du déphasage $\phi_{2/1}(M, t)$ par :

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{\mathcal{E}_1}\sqrt{\mathcal{E}_2} \cos(\phi_{2/1}(M))$$

1.2.7. Tracer $\mathcal{E}(M)$ en fonction de $\phi_{2/1}(M)$. Exprimer et préciser sur le graphe les éclaircissements maximum $\mathcal{E}_{\text{MAX}}$ et minimum $\mathcal{E}_{\text{MIN}}$ en fonction de $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$. Déterminer le contraste C en fonction de $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$. Dans quelle situation le contraste est-il maximal ?

Dans la suite du problème, sauf précision contraire, les sources sont supposées parfaitement cohérentes.

1.3. Figures d'interférences créées par deux sources ponctuelles monochromatiques cohérentes

Deux sources lumineuses ponctuelles cohérentes S_1 et S_2 émettent dans le vide deux ondes monochromatiques de même longueur d'onde λ_0 , de même amplitude a_0 et en phase en leurs origines respectives S_1 et S_2 . Ces sources distantes de b sont symétriques par rapport à C (figure 1). L'éclairement obtenu sur l'écran en occultant l'une des deux sources, est noté $\mathcal{E}_0$.

Un écran (E) d'observation est parallèle à la droite des sources et situé à une distance D de celles-ci. La droite normale à l'écran passant par C définit l'axe du système et cet axe coupe l'écran en B. Les sources S_1 et S_2 sont dans le plan (BXZ). Le point M, de coordonnées (X, Y, 0) dans le repère BXYZ, est un point de l'écran proche de B. Il est suffisamment éloigné des sources pour que $D \gg b$, $D \gg X$ et $D \gg Y$.

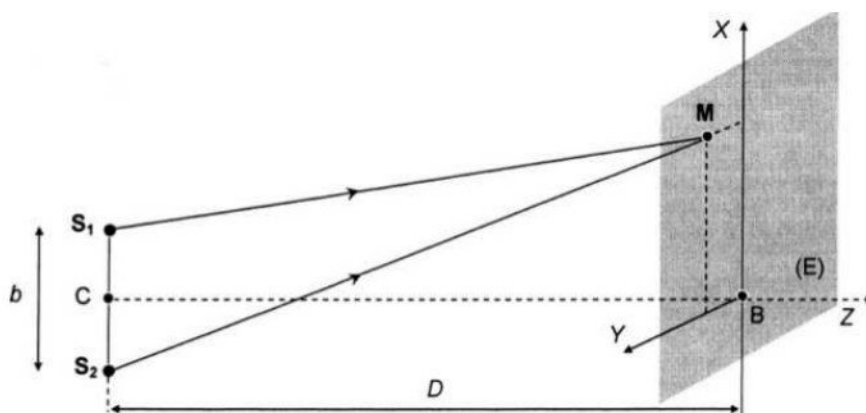


Figure 1:

1.3.1. Comment réalise-t-on de telles sources ? Donner l'éclairement $\mathcal{E}(M)$ au point M fonction de la différence de marche $\delta_{2/1}(M) = (S_2M) - (S_1M)$, de λ_0 et $\mathcal{E}_0$?

1.3.2. Démontrer l'expression approchée de la différence de marche $\delta_{2/1}(M) = (S_2M) - (S_1M)$. En déduire l'éclairement $\mathcal{E}(M)$ au point M de l'écran en fonction de X , b , D , λ_0 et $\mathcal{E}_0$. Quelle est la forme des franges d'interférence observées ?

1.3.3. Définir l'ordre d'interférence $p(M)$ au point M. Préciser, en justifiant, la valeur de $p(M)$:

- lorsque : la frange d'interférence en M est brillante,
- lorsque la frange d'interférence en M est sombre.

1.3.4. Définir et exprimer l'interfrange i en fonction de λ_0 , b et D .

L'écran (E) est maintenant placé perpendiculairement à la droite S_1S_2 en B supposé centre de l'écran (figure 2). Il est situé à une distance D du point milieu C entre les deux sources. Un point M du plan d'observation est défini par : $\rho = BM$, avec $D \gg b$ et $D \gg \rho$.

1.3.5. Démontrer l'expression approchée de la différence de marche $\delta_{2/1}(M) = (S_2M) - (S_1M)$ en fonction de b et de l'angle $\theta = (\vec{CB}, \vec{CM})$.

1.3.6. Exprimer l'éclairement $\mathcal{E}(M)$ au point M de l'écran en fonction de θ , b , λ_0 et $\mathcal{E}_0$, puis en fonction de ρ , D , b , λ_0 et $\mathcal{E}_0$.

1.3.7. Justifier la forme des franges d'interférences obtenues. L'ordre d'interférence est-il croissant ou décroissant à partir du centre B ? Justifier la réponse.

2^{ème} partie

Diffraction à l'infini par une fente rectangulaire

L'espace est rapporté, en coordonnées cartésiennes, à un repère orthonormé direct (Ox, Oy, Oz) de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Tous les dispositifs étudiés sont envisagés dans le vide (indice absolue $n_0 = 1$).

Les lentilles sphériques minces, considérés dans ce problème et notées (L_i) , sont utilisées dans le cadre de l'approximation de Gauss. Chaque lentille (L_i) est caractérisée par son centre optique O_i et par sa distance focale image f'_i . Les foyers objet et image sont notés respectivement F_i et F'_i .

Figure 2

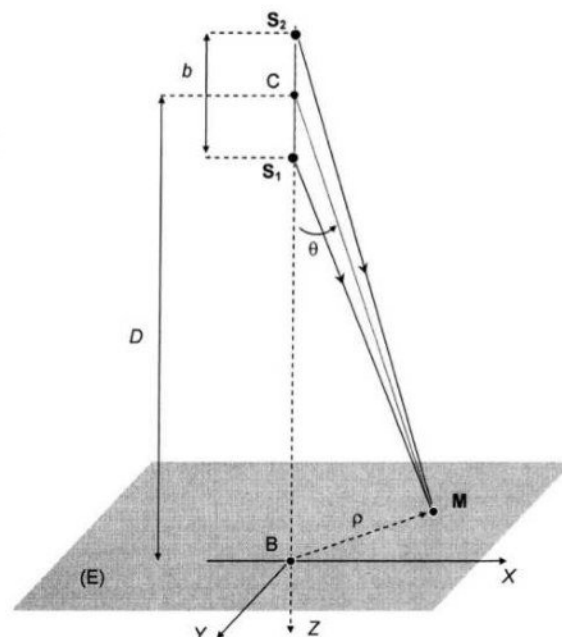


Figure 2:

Un écran plan et opaque (E), dans lequel est ménagée une ouverture (S), pupille parfaitement transparente, est installé dans le plan xOy , entre deux lentilles minces convergentes (L_1) et (L_2), de même axe optique $z'z$. Une source ponctuelle monochromatique A_0 de longueur d'onde λ_0 , est placée au foyer objet F_1 de (L_1).

Après passage à travers (L_1), le faisceau lumineux émis par A_0 tombe sur le diaphragme (S) : la lumière transmise traverse ensuite la seconde lentille (L_2) pour être finalement interceptée par un second écran plan opaque (E'), parallèle à (E), placé dans le plan focal image de (L_2) et situé dans le plan $x'O'y'$. Les origines O et O' appartiennent à l'axe optique et les axes Ox et Ox' sont parallèles (figure 3).

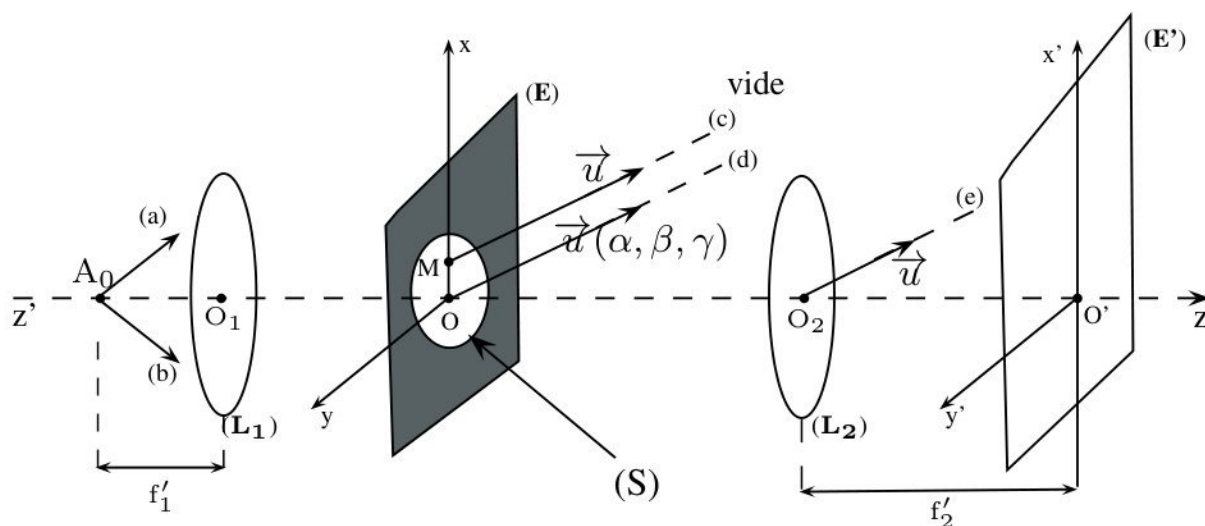


Figure 3:

L'observation de la lumière diffractée s'effectue sur l'écran (E'). Compte-tenu du montage

proposé (figure 3), l'interprétation de la diffraction s'appuie sur les outils de calcul suivants :

- seuls les points de la pupille (S) diffractent la lumière ;
- la phase du rayon (d) diffracté en O, dans la direction définie par le vecteur unitaire $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$, est choisie pour origine des phases.
- la phase du rayon (c) diffracté en M, dans la direction définie par le vecteur unitaire $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$, est définie par :

$$\varphi(M) = 2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda_0}, \quad \delta(M) = -\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}$$

- l'amplitude complexe $\underline{d\psi}$ de l'onde diffractée, suivant le même vecteur $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$, par la surface élémentaire $dS = dx dy$ centrée au point M, s'écrit :

$$\underline{d\psi} = k \exp(-j\varphi(M)) dx dy$$

avec k constante positive et j nombre complexe ($j^2 = -1$).

2.1. Généralités

2.1.1. Citer le nom d'un physicien ayant été associé, historiquement, à l'interprétation du phénomène de diffraction de la lumière.

2.1.2. Recopier, sommairement, la figure 3 en prolongeant le trajet des rayons lumineux (a) et (b) jusqu'à l'écran (E), puis celui des rayons (c), (d) et (e) jusqu'à l'écran (E').

2.1.3. Quelle est (sont) la (les) principale(s) propriété(s) de l'onde lumineuse monochromatique reçue par l'ouverture plane (S) ?

2.1.4. Exprimer en fonction des variables α, β, x, y et de la longueur d'onde λ_0 , la phase $\varphi(M)$.

2.2. Diffraction par une ouverture rectangulaire

2.2.1. La pupille (S) est une ouverture rectangulaire, de centre O, de largeur ℓ parallèle à l'axe Ox et de longueur L parallèle à l'axe Oy, avec $\ell < L$ (figure 4).

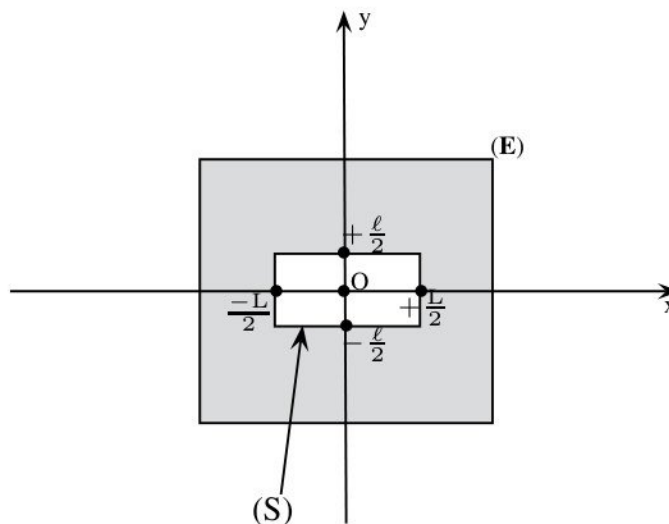


Figure 4:

2.2.1.1. L'égalité $\exp(j\theta) = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$ est rappelée. Montrer que l'amplitude complexe $\underline{\psi}(\alpha, \beta, \gamma)$ de l'onde diffractée par (S), dans la direction de vecteur $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$, s'écrit sous la forme :

$$\underline{\psi}(\alpha, \beta, \gamma) = \psi_0 \frac{\sin(A(\alpha))}{A(\alpha)} \times \frac{\sin(B(\beta))}{B(\beta)}$$

2.2.1.2. L'expression trouvée est-elle complexe ou réelle ?

2.2.1.3. Exprimer, en fonction des données de l'énoncé, la constante ψ_0 et les fonctions $A(\alpha)$ et $B(\beta)$.

2.2.2. Le rôle de la lentille (L_2), de distance focale f'_2 , est de ramener dans son plan focal image, donc à distance finie, les phénomènes relevant de la diffraction à l'infini. Les rayons lumineux sont faiblement inclinés sur l'axe optique.

2.2.2.1. En déduire une relation entre α , x' et f'_2 d'une part, puis entre β , y' et f'_2 d'autre part.

2.2.2.2. Après avoir posé $I = \frac{\lambda_0 f'_2}{\ell}$ et $J = \frac{\lambda_0 f'_2}{L}$ (grandeurs homogènes à des longueurs), réécrire l'expression de l'amplitude résultante ψ (question 2.2.1.1.) en fonction des variables x' et y' .

2.2.3. L'éclairement $\mathcal{E}'(x', y')$ au point $M'(x', y')$ de l'écran d'observation (E'), est proportionnel au carré de l'amplitude de l'onde diffractée vers M' (cette propriété n'est pas à redémontrer). L'éclairement sur l'écran s'écrit donc sous la forme :

$$\mathcal{E}'(x', y') = \mathcal{E}'_0 \left[\frac{\sin(A'(x'))}{A'(x')} \right]^2 \times \left[\frac{\sin(B'(y'))}{B'(y')} \right]^2$$

2.2.3.1. Expliciter, en faisant intervenir notamment les longueurs I et J , les fonctions $A'(x')$ et $B'(y')$.

2.2.3.2. Rappel si $t \rightarrow 0$, $\lim \left(\frac{\sin(t)}{t} \right) = 1$.

A l'aide d'un schéma, décrire la figure de diffraction dans le plan $x'O'y'$, en précisant, notamment, la position relative des franges sombres (minima nuls à symboliser par des traits noirs) pour lesquelles l'éclairement $\mathcal{E}' \rightarrow 0$.

2.2.3.3. Déterminer, en fonction de I et J (ou de λ_0 , f'_2 , ℓ et L), les dimensions de la tache centrale de diffraction.

2.2.4. Dessiner ou schématiser, sommairement, la nouvelle figure de diffraction, si la largeur ℓ de l'ouverture (S) devient très faible et la longueur L très importante (fente fine).