

Centre Régional des Métiers de l'Éducation et de Formation-Grand Casablanca

Concours d'Entrée en Première Année du Cycle de Préparation
À l'Agrégation de Sciences Physiques
Option : Physique
Session : Juin-2016

ÉPREUVE DE PHYSIQUE II

Durée 4 heures

Cette épreuve comporte 18 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *autorisé*

L'énoncé de cette épreuve comporte 18 pages.
L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé.

On veillera à une présentation claire et soignée des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les **références** des questions abordées.

Dans le cas où un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale très lisiblement dans sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

```
def distribution2 (n,q) :
    tab = q*[0]
    tab2 = q*[0]
    tab3 = q*[0]
    for t in range (0, q/2) :
        for u in range (0, q/2) :
            tab3[ -(t*u)% (q/2)) % q] = tab3[ -(t*u)% (q/2)) % q] + 1
    for t in range (0, q/2) :
        for u in range (0, q/2) :
            tab[ -(t*u)% (q/2)) % q] = tab[ -(t*u)% (q/2)) % q] + 1
    for y in range (2,n+1) :
        if (y % 2 == 0) :
            for j in range (q) :
                for i in range (q) :
                    tab2[(i+j) % q]=tab2[(i+j) % q] + (tab[i])*tab3[j]
            tab = q*[0]
        else :
            for j in range (q) :
                for i in range (q) :
                    tab[(i+j) % q]=tab[(i+j) % q] + (tab2[i])*tab3[j]
            tab2 = q*[0]
    if (n % 2 == 0) :
        return tab2
    else :
        return tab
```

Les signaux optiques peuvent être utilisés pour transporter une grande quantité d'information sur d'importantes distances. Nous nous intéresserons ici à quelques caractéristiques d'une ligne de transmission optique, dont le schéma synoptique est représentée dans la figure 1.

Les deux première parties traitent de la propagation guidée dans une fibre optique et des problèmes associés qui altèrent la qualité de la transmission et qui limitent le débit. Dans une troisième partie, nous nous intéresserons aux modules d'émission et de réception. Dans la quatrième partie, nous présenterons la technique de multiplexage fréquentielle qui permet de faire transiter dans une même fibre plusieurs informations simultanément. Enfin, la cinquième partie constitue une analyse documentaire d'un article scientifique sur la diffusion d'un faisceau laser par une fibre optique.

Les cinq parties peuvent être traitées de façon largement indépendante.

Première partie : Propagation guidée de la lumière

I.A - Lois de Descartes

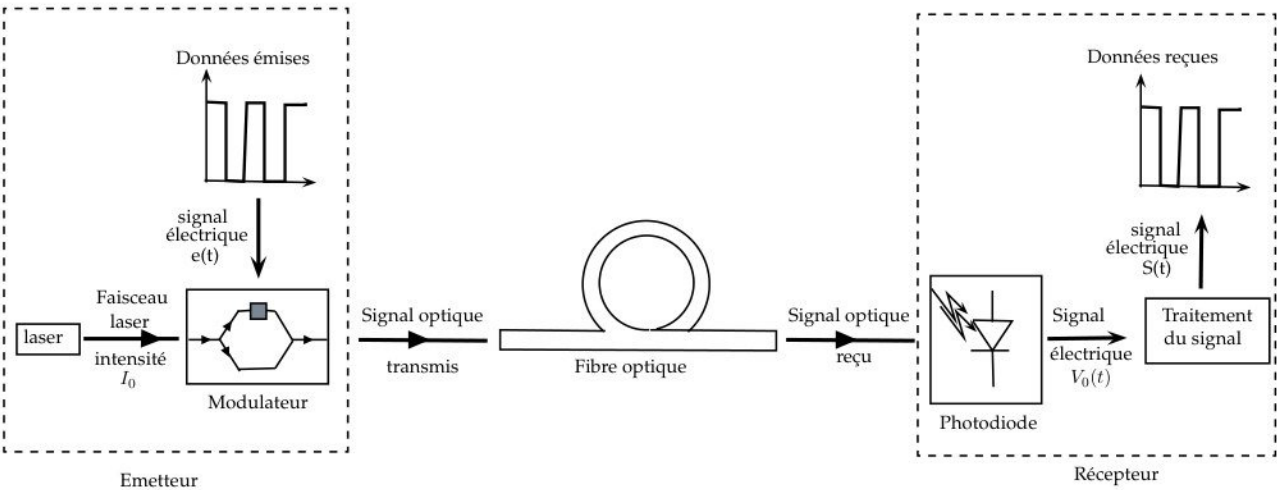


Figure 1: Synoptique d'une ligne de transmission optique.

On considère un dioptre plan séparant deux milieux transparents et homogènes : le milieu (1) d'indice n_1 et le milieu (2) d'indice n_2 . De la lumière se propage du milieu (1) vers le milieu (2). On isole un rayon frappant le dioptre en I, et formant un angle i_1 avec (N), normale au dioptre en I. on observe l'existence d'un rayon réfléchi dans le milieu (1) formant un angle i' avec (N) et éventuellement d'un rayon réfracté formant un angle i_2 avec (N). Les angles sont non orientés.

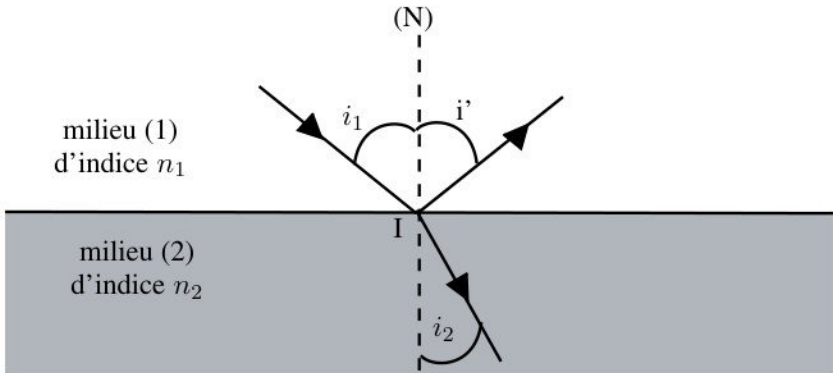


Figure 2: Lois de Descartes.

1. À quelle condition peut-on considérer que la lumière est constituée de rayons lumineux indépendants ?
2. Énoncer les lois de Descartes relatives à la réfraction et à la réflexion.
3. Décrire le phénomène de réflexion totale : on précisera notamment la condition sur les indices et la condition sur l'angle i_1 .

I.B - Fibre optique à saut d'indice

Une fibre optique est un fin cylindre de verre, capable de guider la lumière sur de longues distances. Un rayon lumineux entrant à une extrémité de la fibre reste piégé à l'intérieur par réflexion totale interne.

Une fibre optique à saut d'indice est constituée d'un cœur cylindrique d'indice n_1 d'un diamètre d'environ $50\ \mu\text{m}$, entouré par une gaine d'indice $n_2 < n_1$.

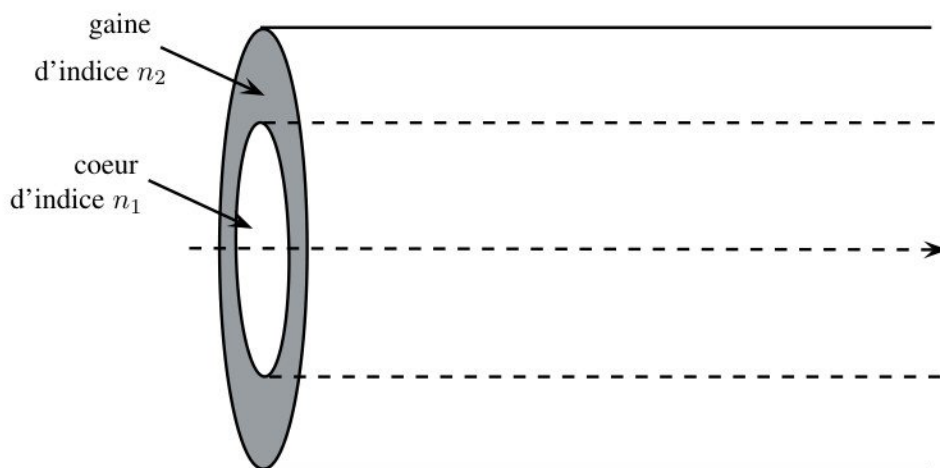


Figure 3: Fibre à saut d'indice.

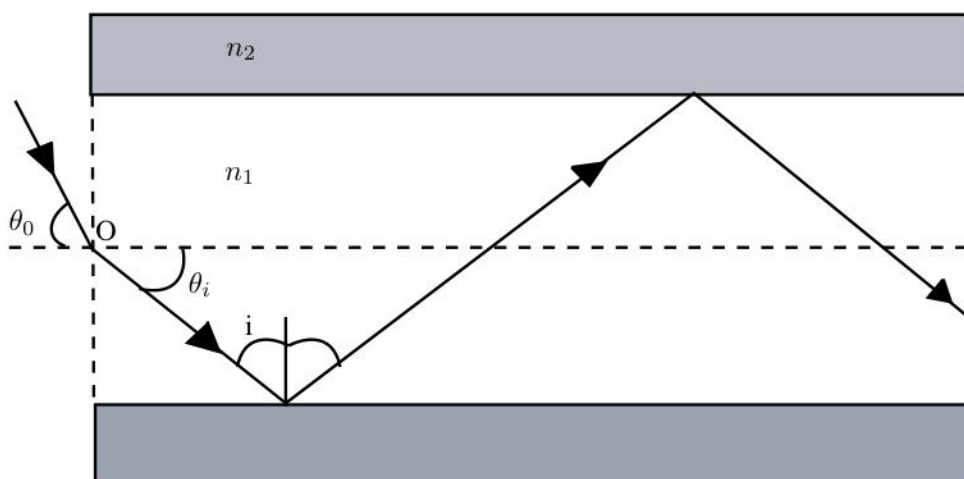


Figure 4: Coupe dans le plan méridien d'une fibre à saut d'indice.

4. Montrer que tout rayon situé dans un plan contenant l'axe de la fibre et formant dans la fibre un angle θ avec l'axe peut se propager dans le cœur en restant dans ce plan si $\theta < \theta_c$, avec θ_c une valeur critique de θ que l'on déterminera en fonction de n_1 et n_2 .
5. Que risque-t-il de se passer si on courbe trop la fibre ? On pourra illustrer au moyen d'un schéma.
6. On définit l'ouverture numérique ON de la fibre par $ON = n_1 \sin(\theta_c)$.
 - (a) Montrer que $ON = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$.
 - (b) On pose $n_1 = n_2 + \delta n$: δn est petit. Établir une expression approchée de ON à l'ordre le plus bas non nul.

- (c) Évaluer ON pour $n_1 = 1,53$ et $n_2 = 1,50$.
- (d) On considère que l'indice de l'air à l'extérieur de la fibre est égal à 1. Soit O le point de l'axe de la fibre situé sur le dioptré air-cœur. On note θ_0 l'angle d'incidence du rayon lumineux entrant dans la fibre en O (figure 4). À quelle condition sur θ_0 le rayon se propage-t-il dans la fibre ?

I.C - Modes de propagation

Le but de cette partie est de montrer que, dans une fibre optique, la lumière peut se propager le long d'un nombre fini de rayons. Pour cela, nous considérons la lumière comme une onde électromagnétique décrite par un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$.

Données et rappels :

- ε_0 : permittivité diélectrique du vide.
- μ_0 : perméabilité magnétique du vide.
- Pour des vecteurs $\vec{A}$ quelconques :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{A})) = \vec{\text{grad}}(\text{div}(\vec{A})) - \Delta(\vec{A})$$

7. Donner les équations de Maxwell dans le vide.
8. Établir l'équation de propagation de $\vec{E}$ dans le vide. Déterminer la vitesse de propagation de l'onde c en fonction de ε_0 et μ_0 .
9. justifier que la vitesse de propagation de l'onde dans un milieu transparent d'indice n est la vitesse de propagation dans le vide divisée par n ?

On veut étudier la propagation d'un champ électrique $\vec{E}$ dans la fibre. Pour simplifier, le "cœur" sera décrit par une couche plane d'indice n_1 , comprise entre les cotes $x = -a$ et $x = +a$. Pour $|x| > a$, le milieu a un indice n_2 (figure 5). Pour chaque région ($|x| < a$ ou $|x| > a$), on cherche $\vec{E}$ sous la forme :

$$\vec{E} = E(x) \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y; \quad \omega > 0; \quad k > 0$$

On pose $\omega = ck_0$ et $k_0\lambda_0 = 2\pi$.

On utilisera la représentation complexe : on pose $\vec{E} = E(x) \exp j(\omega t - kz) \vec{e}_y$

10. On cherche $\vec{B} = \vec{B}_m \exp j(\omega t - kz)$. Exprimer $\vec{B}_m$ en fonction de $E(x)$, k , ω , $\frac{dE(x)}{dx}$ et des vecteurs de base.
11. Justifier que $E(x)$ et $\frac{dE(x)}{dx}$ sont continus en $x = \pm a$.
12. On s'intéresse à la propagation dans la "gaine" : $|x| > a$.
- (a) Écrire l'équation de propagation vérifiée par $\vec{E}$ dans ce milieu en tenant compte de la question 9.
- (b) En déduire l'équation différentielle vérifiée par $E(x)$ pour $|x| > a$.
- (c) Discuter la nature des solutions selon le signe de $n_2k_0 - k$. En déduire la condition pour que la propagation soit guidée dans le cœur. On considère que cette condition vérifiée dans la suite.

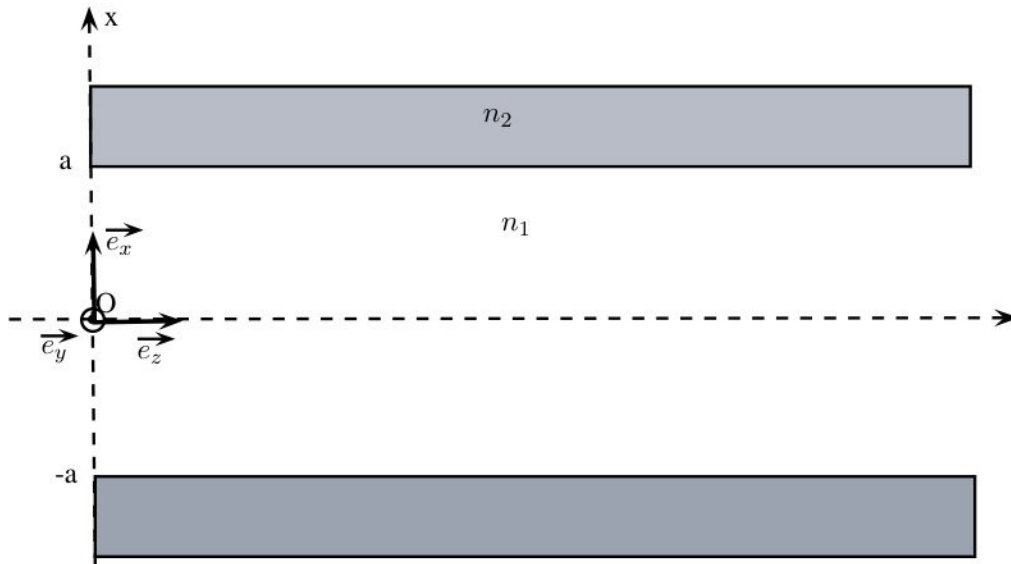


Figure 5: Modélisation du coeur par une couche plane.

(d) On pose :

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{k^2 - n_2^2 k_0^2}}$$

Écrire la solution $E(x)$ sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions exponentielles, en fonction de δ et des constantes d'intégration qu'on ne cherchera pas à déterminer pour l'instant ; on distinguera les cas $x > a$ et $x < -a$.

13. On s'intéresse à la propagation dans le "cœur" : $|x| < a$.

- (a) Écrire l'équation de propagation vérifiée par $\vec{E}$ dans ce milieu.
- (b) En déduire l'équation différentielle vérifiée par $E(x)$ pour $|x| < a$.
- (c) À quelle condition sur n_1 a-t-on $E(x)$ fonction sinusoïdale de x ? On considère cette condition vérifiée dans la suite.
- (d) On pose :

$$\eta = \sqrt{n_1^2 k_0^2 - k^2}$$

Exprimer $E(x)$ en fonction de η et de constantes d'intégration qu'on ne cherchera pas à déterminer pour l'instant.

On choisit de ne s'intéresser qu'aux solutions paires, c'est à dire $E(x) = E(-x) \quad \forall x$

- 14. Pour $|x| < a$, donner l'expression de $E(x)$ en notant E_m son amplitude. Pour $|x| > a$, justifier que dans chacun des cas, le coefficient d'une des exponentielles est nécessairement nul.
- 15. Représenter l'allure de $E(x)$ en considérant $2a\eta = 6\pi$ pour fixer les idées.
- 16. En utilisant les relations de continuité, établir la relation :

$$\tan(\eta a) = \sqrt{\frac{k_0^2 ON^2}{\eta^2} - 1}$$

- 17. Expliquer comment déterminer graphiquement les solutions de cette équation d'inconnue η . Ces solutions sont appelées "modes".

18. Exprimer le nombre total N de modes en fonction de ON , λ_0 et a .
19. Évaluer N pour $\lambda_0 = 1 \mu m$, $ON=0,3$ et $a = 25 \mu m$.
20. On admet que chaque mode correspondant à un rayon d'inclinaison donnée. Exprimer la valeur de a permettant d'avoir une propagation le long d'un seul rayon. L'évaluer numériquement pour $\lambda_0 = 1 \mu m$ et $ON=0,3$.

Deuxième partie : Absorption et dispersion

Le but de cette partie est de mettre en évidence les problèmes qui limitent le débit et la distance sur laquelle on peut transporter l'information.

II.A - Absorption

Pendant longtemps, les pertes ont été un problème majeur de la transmission le long des fibres optiques. Au début, la puissance injectée à l'entrée de la fibre était divisée par 1000 après 1 km de parcours ! Aujourd'hui, elles présentent des pertes bien moindres que les autres câbles. De plus, il est possible de placer à espace régulier le long de la fibre des amplificateurs de signal.

On définit le coefficient d'atténuation A (en dB/km) par :

$$A = 10 \log \left(\frac{P_e}{P_s} \right)$$

Avec P_e désigne la puissance optique du signal à l'entrée de la fibre et P_s la puissance optique du signal récupéré au bout de 1 km de la fibre. A dépend de la longueur d'onde λ .

21. A présente un minimum pour une longueur d'onde $\lambda_0 = 1.6 \mu m$.
 - (a) À quelle partie du spectre électromagnétique appartient λ_0 ?
 - (b) Quel phénomène est souvent responsable de l'absorption dans cette partie du spectre ?

On considère un tronçon de fibre d'axe (Oz) compris entre $z = 0$ et $z = L$. On note $P(z)$ la puissance du signal récupéré en z . L'évolution de $P(z)$ vérifie la loi de Beer-Lambert :

$$\frac{dP}{dz} = -\alpha P(z)$$

avec α une constante positive.

22. Établir l'expression de la puissance récupérée à la sortie de la fibre de longueur L en fonction de P_e , α et L .
23. Exprimer les pertes relative $\frac{\Delta P}{P} = \frac{P_e - P_s}{P_e}$ en fonction de α et L .
24. Pour $\lambda_0 = 1,6 \mu m$, $A = 0,2 \text{ dB/km}$. Déterminer la valeur numérique de α pour cette longueur d'onde. On donne $\ln(10) = 2.3$.

25. Exprimer $\frac{\Delta P}{P}$ pour $L = 10 \text{ m}$ et pour $L = 1 \text{ km}$. Commenter.

II.B - Dispersion intermodale

Une fibre optique multimode transporte la lumière le long de plusieurs rayons. Les rayons lumineux d'inclinaisons différentes n'ont pas le même chemin à parcourir dans la fibre, donc le temps de parcours est variable. Il en résulte un étalement temporel du signal : ce phénomène est la dispersion intermodale.

26. Soit Δt_m la différence de temps de parcours entre deux rayons lumineux se propageant dans une fibre optique (cœur d'indice n_1 , gaine d'indice n_2) de longueur L , l'un sur l'axe de la fibre et l'autre incliné de $\theta_c = \arcsin(n_2/n_1)$ par rapport à celui-ci (figure 4). Exprimer la longueur parcourue par le rayon non parallèle à l'axe en fonction de L et θ_c . En déduire Δt_m en fonction de n_1 , n_2 , L et c .

Une série d'impulsions lumineuses ultra-courtes est envoyée dans la fibre. On donne T l'intervalle de temps séparant deux impulsions successives (figure 6).

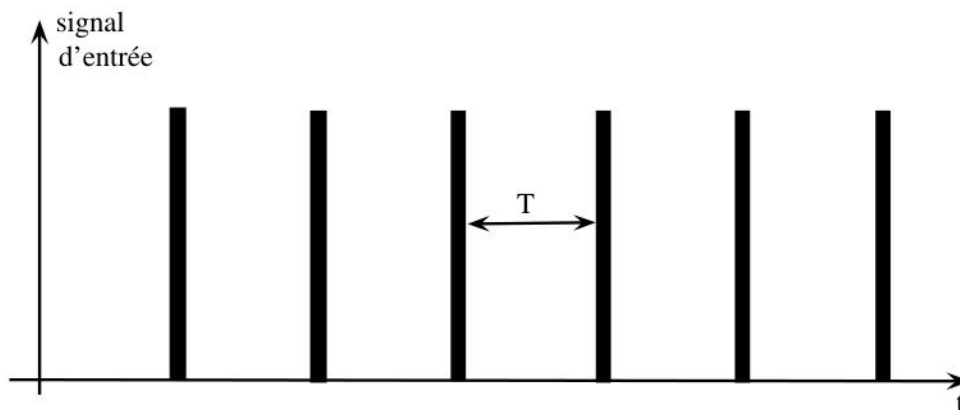


Figure 6: Signal d'entrée.

27. Représenter l'allure du signal récupéré à la sortie de la fibre dans le cas où $\Delta t_m < T$ et dans le cas où $\Delta t_m > T$. Commenter.
28. On note BP_m la bande passante de la fibre associée à la dispersion intermodale : BP_m représente la fréquence maximale des signaux pouvant transiter dans la fibre. Exprimer BP_m en fonction de n_1 , n_2 , L et c .
29. On considère $n_1 = 1,53$ et $n_2 = 1,50$. Évaluer numériquement BP_m pour $L = 10 \text{ m}$ et pour $L = 1 \text{ km}$ (on prendra $c = 3 \text{ m.s}^{-1}$). Commenter et proposer une solution.
30. Pour limiter la dispersion intermodale, on peut aussi utiliser la fibre à gradient d'indice : c'est une fibre dont l'indice n_1 du cœur dépend de la distance r à l'axe. Quel doit être le sens de variation de $n_1(r)$? Représenter qualitativement la trajectoire d'un rayon arrivant dans la fibre en formant un angle θ avec l'axe.

II.C - Dispersion chromatique

31. La lumière utilisée, même si elle est issue d'un laser, n'est pas parfaitement monochromatique. Or l'indice n_1 du cœur dépend de la longueur d'onde. Expliquer en quoi cela limite le débit d'informations transitant dans la fibre.
32. Considérons dans un premier temps que le signal contient 2 longueurs d'onde. On s'intéresse à la superposition de 2 ondes planes progressives harmoniques (OPPH), de même amplitude S_0 , de pulsations ω et $\omega + \delta\omega$:

$$s_1(z, t) = S_0 \cos(\omega t - kz); \quad s_2(z, t) = S_0 \cos[(\omega + \delta\omega)t - (k + \delta k)z]$$

k (respectivement $k + \delta k$) étant lié à ω (respectivement $\omega + \delta\omega$) par une relation qu'on ne cherchera pas à établir ici. On suppose que $\delta\omega$ et δk positifs et on considère $\delta\omega \ll \omega$ et $\delta k \ll k$.

- (a) Établir l'expression de l'onde résultante $s(z, t) = s_1(z, t) + s_2(z, t)$. On la mettra sous la forme d'un produit.
- (b) Commenter l'expression de $s(z, t)$: on justifiera que $s(z, t)$ est le produit d'une fonction aux variations spatiales et temporelles lentes, l'enveloppe, avec une fonction aux variations spatiales et temporelles rapides.
- (c) Représenter l'allure de $s(z, t = 0)$ en fonction de z .
- (d) On admet que l'information est transportée par l'enveloppe. Quel est le temps τ_g mis par l'information pour parcourir l'unité de longueur ?

Dans le cas où le spectre contient une infinité de longueurs d'onde, on caractérise la dépendance du temps de propagation de l'information τ_g par unité de longueur par rapport à la longueur d'onde par la dispersion $D(\lambda)$ définie par : $D(\lambda) = \frac{d\tau_g}{d\lambda}$.

33. On se place à $\lambda_m = 1,5 \mu\text{m}$. Pour cette longueur d'onde, D est de l'ordre de $10 \text{ ps.nm}^{-1}.\text{km}^{-1}$. On note Δt_c la différence maximale de temps de parcours entre les différentes composantes monochromatiques. Sachant qu'on arrive à réduire la largeur spectrale $\Delta\lambda$ en sortie du laser de façon à avoir $\Delta\lambda = 1 \text{ nm}$, donner l'ordre de grandeur de Δt_c pour $L = 1 \text{ km}$. En déduire l'ordre de grandeur de la bande passante BP_c de la fibre associée à la dispersion chromatique pour $L = 1 \text{ km}$. Commenter.

Troisième partie : Émission-Réception

III.A - Émission

Pour transporter l'information, on utilise comme support la lumière issue d'un laser que l'on fait passer dans un modulateur : l'intensité lumineuse en sortie du modulateur varie au cours du temps en fonction du signal à transmettre.

Le modulateur étudié ici est un interféromètre de Mach-Zenhder.

On considère que le laser délivre une onde plane monochromatique de pulsation ω , de longueur d'onde dans le vide λ . Le faisceau incident est séparé en 2 faisceaux de même intensité : l'un se propage dans une fibre homogène d'indice n_1 (voie 1), l'autre se propage dans une fibre identique mais on intercale sur son trajet un milieu de longueur d dont on peut faire varier l'indice n au moyen d'une tension électrique, image du signal à transmettre (voie 2). Les 2 voies ont la même longueur totale.

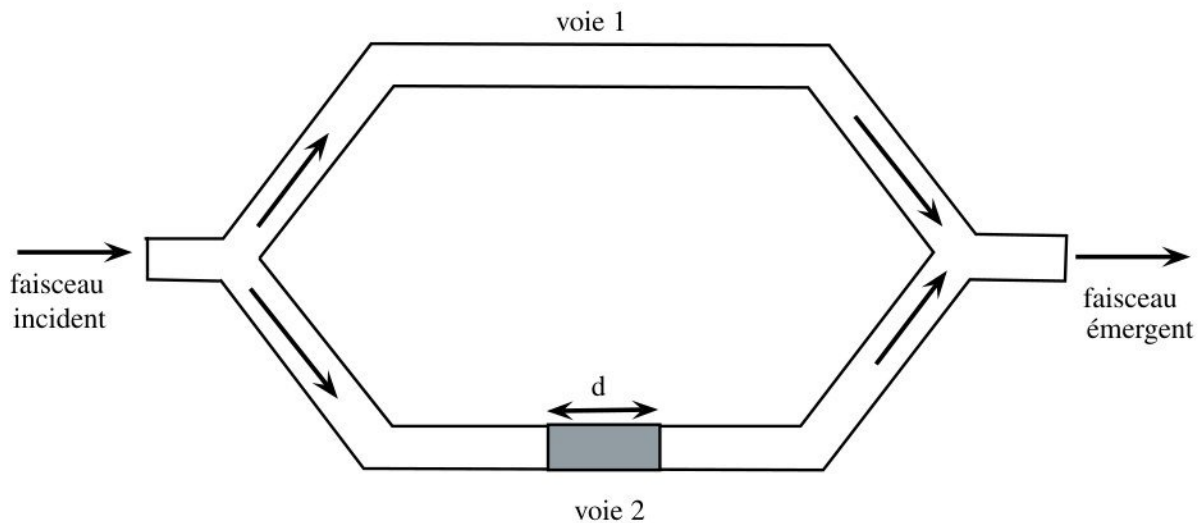


Figure 7: Modulateur : interféromètre de Mach-Zehnder.

En sortie, le signal optique récupéré en sortie de la voie 1 s'écrit $f_1(t) = g_0 \cos(\omega t)$ et celui récupéré en sortie de la voie 2 s'écrit $f_2(t) = g_0 \cos(\omega t + \phi)$, g_0 est une constante.

34. Rappeler le théorème de Malus.
35. Exprimer ϕ en fonction de n , n_1 , d et λ .
36. On définit l'intensité I en sortie du modulateur par $I = \langle [f_1(t) + f_2(t)]^2 \rangle$. Établir l'expression de I en fonction de ϕ et de $I_0 = g_0^2$.
37. On souhaite transmettre des données numériques : l'information est alors codée sous la forme d'une succession d'impulsions. Pour cela, on doit être en mesure de réaliser $I = 0$ et $I = 2I_0$.
 - (a) Exprimer en fonction de λ et d la plus petite différence Δn entre les deux valeurs de l'indice n permettant de transmettre ce signal.
 - (b) Calculer Δn pour $\lambda = 1,5 \mu\text{m}$ et pour $d = 5 \text{ cm}$.

III.B - Réception

Au bout du canal de transmission, l'intensité lumineuse est une image altérée du signal électrique à transmettre $e(t)$. Il faut donc transformer le signal optique de longueur d'onde λ en un signal électrique puis le mettre en forme pour reconstituer le signal initial. On propose ici une étude simplifiée du système de réception.

38. La lumière est détectée par une photodiode : c'est un dipôle dont le rôle est de convertir la puissance optique reçue P_s en courant électrique de photo-détection i_0 .
 - (a) Le rendement quantique r est défini par :

$$r = \frac{\text{nombre d'électrons collectés}}{\text{nombre de photons incidents}}$$

Sachant que l'énergie transportée par un photon vaut hc/λ , avec h la constante de Planck, exprimer le courant de photodétection i_0 en fonction de la charge élémentaire e et de r , P_s , λ , h et c .

- (b) Évaluer i_0 pour $P_s = 10 \text{ mW}$, $r = 0,8$ et $\lambda = 1,5 \text{ } \mu\text{m}$. On prendra $h = 6,67.10^{-34} \text{ J.s}$, $e = 1,6.10^{-19} \text{ C}$ et $c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

On assimile la photodiode à une source idéale de courant délivrant i_0 . Pour convertir i_0 en tension, on utilise le montage représenté sur la figure 8a, constitué d'un amplificateur opérationnel idéal et d'un conducteur ohmique de résistance R_f . Le montage obtenu est un montage trans-impédance.

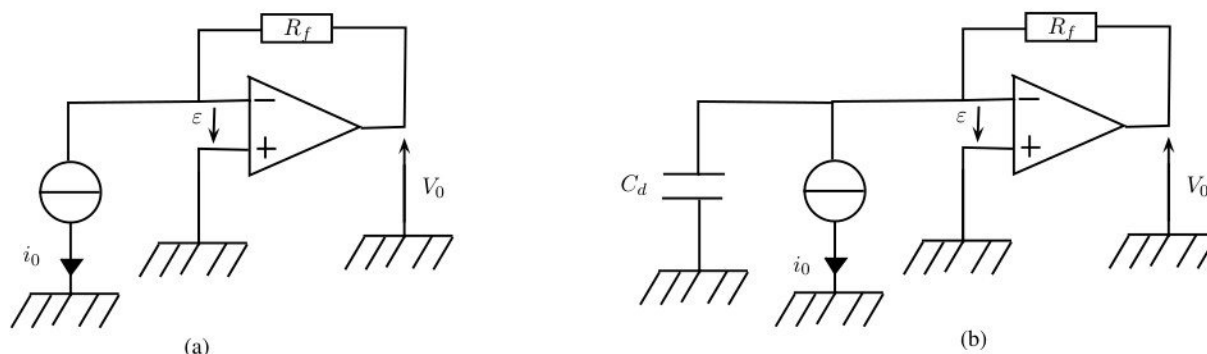


Figure 8: Montage transimpédance.

39. Établir la relation entre la tension de sortie V_0 et i_0 .

En réalité, la photodiode est assimilable à une source idéale de courant en parallèle avec un condensateur de capacité C_d (figure 8b). Par ailleurs, on tient compte du gain G limité de l'A.O : $V_0 = G\varepsilon$. On se place en régime sinusoïdal forcé à la pulsation Ω et on considère $G \gg 1$.

40. Exprimer $\frac{V_0}{i_0}$ en fonction de R_f , G , C_d et Ω .
41. Quelle est la pulsation de coupure Ω_c du montage ?
42. $G = 10^5$ et $C_d = 10 \text{ pF}$; la tension de saturation V_{sat} de l'amplificateur opérationnel vaut 15 V et la valeur maximale de i_0 est $0,01 \text{ A}$. On souhaite être en mesure de récupérer des signaux de fréquence allant jusqu'à 100 MHz . Proposer une valeur pertinente pour R_f .

Quatrième partie : Multiplexage-Démultiplexage

Le multiplexage consiste à faire transiter dans une même fibre optique plusieurs signaux adressés à des destinataires différents. Dans le cas du multiplexage en longueur d'onde (WDM, Wave Division Multiplexing), les différents signaux sont transmis par différentes longueurs d'onde et sont envoyés simultanément.

À la sortie de la fibre, il faut pouvoir séparer les longueurs d'onde afin de faire transiter chaque information vers son destinataire : c'est le démultiplexage. La solution retenue ici est celle du réseau de diffraction.

43. Rappels de cours :

- (a) Rappeler le principe d'Huygens-Fresnel.
- (b) Quelles sont les conditions expérimentales permettant d'observer la diffraction de Fraunhofer ?

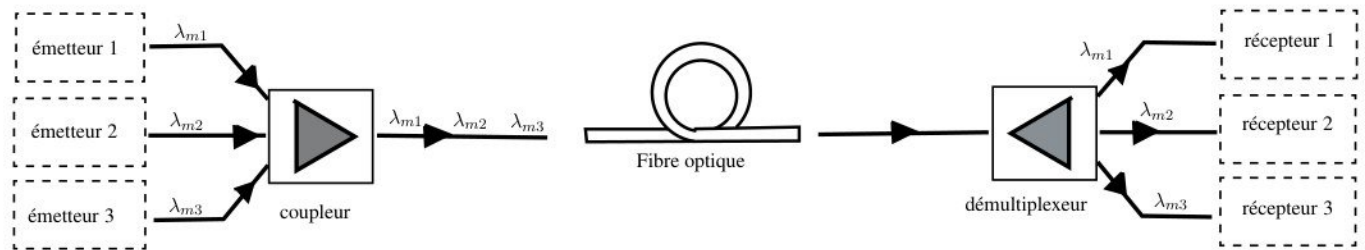


Figure 9: Principe du multiplexage en longueur d'onde.

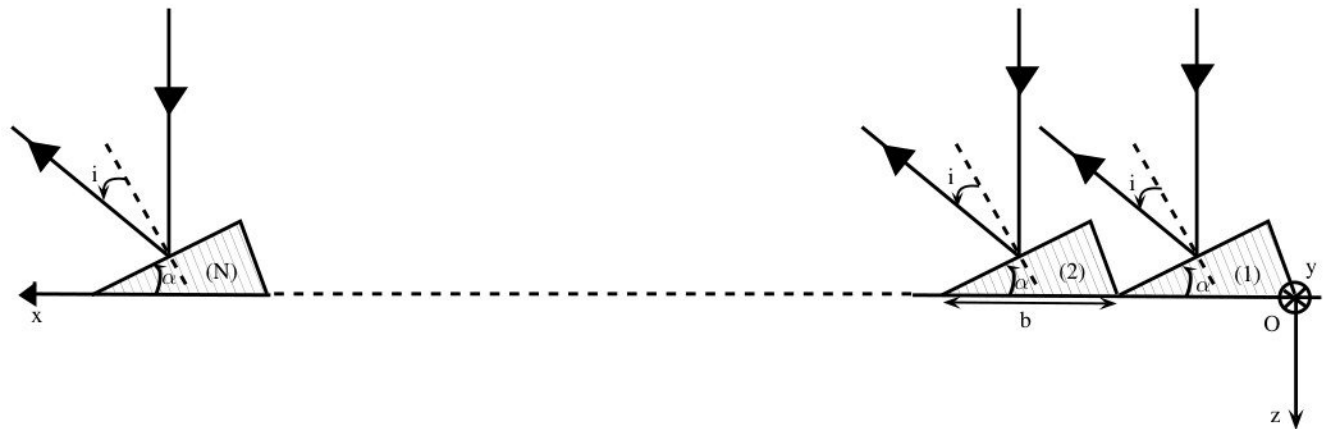


Figure 10: Réseau de diffraction.

On considère un réseau constitué de N miroirs identiques infiniment longs, de largeur l , espacés d'une distance b comme l'indique la figure ci-dessous. Chaque miroir est incliné d'un angle α par rapport au plan (Oxy) .

Ce réseau est éclairé sous incidence normale au plan (Oxy) par une onde plane.

On s'intéresse à l'intensité diffractée à l'infini dans la direction du plan (Oxz) formant un angle i avec les normales aux miroirs.

On considère dans un premier temps que la largeur des miroirs est très petite.

On note I_r l'intensité diffractée à l'infini sous cette hypothèse. La lumière est monochromatique de longueur d'onde λ .

44. Exprimer le déphasage ϕ du rayon ayant frappé le centre du k -ième miroir par rapport à celui ayant frappé le centre du $(k+1)$ -ième miroir en fonction de b , i , α et λ (figure 10).
45. En déduire les directions dans lesquelles on récupère les maxima d'intensité, on exprimera la relation en faisant intervenir un entier p .
Le réseau est maintenant éclairé avec une lumière polychromatique : les directions des maxima d'intensité dépendent de λ , le réseau disperse la lumière et on obtient un spectre.
46. Exprimer $\frac{di}{d\lambda}$ à i et $p \neq 0$ fixés. Comment choisir l'ordre p pour avoir la dispersion la plus grande possible ?
47. L'onde incidente contient 3 longueurs d'onde proches : $\lambda_{m1} = 1530 \text{ nm}$, $\lambda_{m2} = 1545 \text{ nm}$, $\lambda_{m3} = 1560 \text{ nm}$, $b = 6 \mu\text{m}$ et $\alpha = 0.25 \text{ rad}$. Par ailleurs, N est supposé suffisamment grand pour que l'on puisse considérer qu'il n'y a quasiment pas de lumière récupérée en dehors des directions déterminées précédemment.

- (a) Donner le nombre maximal d'ordre visible.
- (b) y-a-t-il recouvrement des ordres 2 et 3 ?

On tient maintenant compte de la largeur l non nulle des miroirs.

Pour comprendre l'effet que cela a sur la figure de diffraction, on revient à une onde monochromatique de longueur d'onde λ .

48. Considérons un seul miroir.

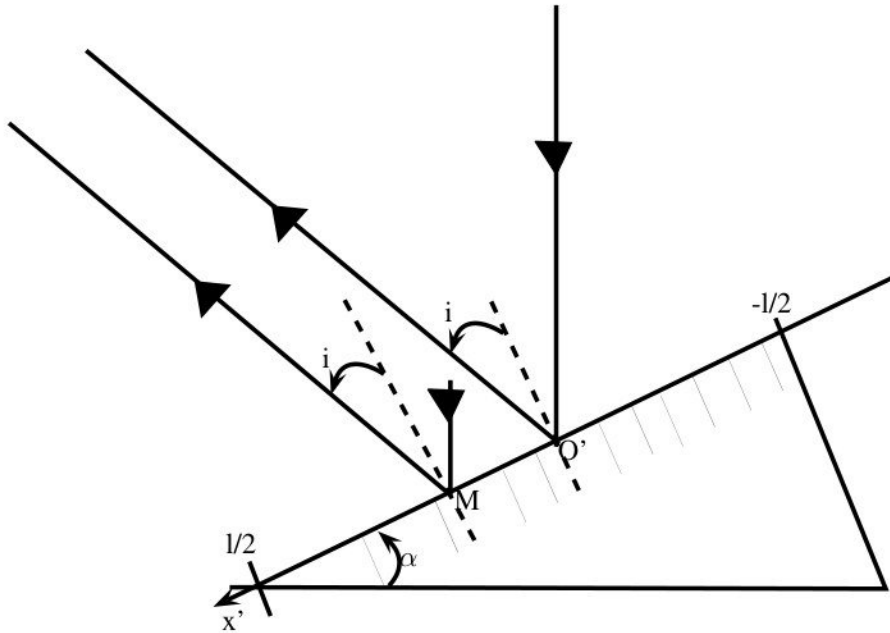


Figure 11: Diffraction par un seul miroir.

- (a) Montrer que l'intensité I_d diffractée dans la direction i peut s'écrire, à une constante multiplicative près sous la forme :

$$I_d = \sin^2 c^2 \left[\frac{\pi l}{\lambda} (\sin(i) - \sin(\alpha)) \right]$$

- (b) Dans quelle direction i a-t-on le maximum de I_d ? Commenter.

On admet que l'intensité I_s diffractée par les N miroirs du réseau peut s'écrire : $I_s = I_r I_d$.

- 49. Montrer que l'ordre p coïncide avec le maximum de I_d si α vérifie $p\lambda = b \sin(2\alpha)$. Expliquer l'intérêt d'avoir un réseau de miroirs inclinés.

On suppose cette condition vérifiée. De plus, on considère que i et α sont petits.

- 50. On cherche à isoler l'ordre p le plus élevé possible.
 - (a) Quelle est la largeur angulaire de la tâche de diffraction ?
 - (b) En déduire que pour que l'ordre $p + 1$ coïncide avec une annulation de I_d , on doit avoir $l \approx b$.

On considère à nouveau l'onde incidente polychromatique contenant les trois longueurs d'onde λ_{m1} , λ_{m2} et λ_{m3} . On prend $b = 6 \mu m$ et $\alpha = 0,25 \text{ rad}$.

51. Calculer l'ordre p_0 isolé. Y-a-t-il recouvrement des spectres ?
52. En s'aidant des questions précédentes, vérifier que le spectre d'ordre p_0 est visible dans son intégralité.
53. Pourquoi utilise-t-on un réseau par réflexion plutôt qu'un réseau par transmission ?

Cinquième partie : Analyse documentaire

On demande au candidat de rédiger la conclusion de l'article ci-dessous. Celle-ci ne doit pas dépasser 20 lignes.

Diffusion d'un faisceau laser par une fibre optique

par Henri GAGNAIRE- Université Jean Monnet - Faculté des Sciences et Techniques 23, rue du Docteur Paul Michelon, 42023 Saint-Etienne Cedex 2

Une expérience consiste à éclairer une fibre optique dénudée par un faisceau laser perpendiculaire à l'axe de la fibre. La lumière est diffusée dans un plan perpendiculaire à la fibre. Pour interpréter de manière correcte le diagramme de rayonnement obtenu, il faudrait utiliser la méthode de Mie déduite de la théorie électromagnétique de la lumière. Cette méthode est décrite de manière sommaire dans [1] et est reprise plus en détail en [2] pour la diffusion de la lumière par une fibre d'indice uniforme. Elle permet de calculer l'intensité de la lumière diffusée tout autour de la fibre quand on connaît le diamètre et l'indice de celle-ci. Calculs et expériences sont en excellent accord [2]. Par contre, il est impossible d'utiliser cette méthode pour faire l'opération inverse c'est-à-dire connaître les caractéristiques de la fibre à partir du diagramme de rayonnement. Nous allons voir qu'on peut atteindre ce but avec une théorie beaucoup plus simple, aisément compréhensible par des étudiants du premier cycle de l'enseignement supérieur.

Diagramme de rayonnement de la fibre

Le diagramme de rayonnement de la fibre est très contrasté lorsque la polarisation du faisceau incident est parallèle à l'axe de la fibre. Il est symétrique par rapport au faisceau incident et peut être décomposé arbitrairement en cinq parties. Lorsque l'angle θ de diffusion par rapport au faisceau incident augmente de 0 à 180° , on trouve successivement :

- la diffraction du faisceau incident par la fibre ($0 < \theta \leq 10^\circ$).
- une alternance de franges sombres et brillantes que nous appellerons phénomène d'interférence dans la suite et que nous étudierons plus particulièrement ($\approx 10^\circ < \theta < \approx 80^\circ$).
- une "accumulation" de lumière lorsque θ est voisin de 100° . C'est l'équivalent pour une fibre optique éclairée par une lumière monochromatique du deuxième arc-en-ciel "atmosphérique".
- une zone où l'intensité diffusée est très faible. C'est l'équivalent de la bande noire d'Alexandre.
- une "accumulation" de lumière lorsque θ est voisin de 150° . C'est l'équivalent du premier arc-en-ciel "atmosphérique" [3].

Pour appréhender qualitativement le diagramme de rayonnement, phénomène de diffraction exclu, on peut considérer les différents rayons secondaires issus du même rayon incident (figure 12). Le nombre de réflexions à l'intérieur de la fibre est limité à deux. Il est facile de calculer la déviation des différents rayons en fonction de l'angle d'incidence i ou du paramètre d'impact $X = \sin i$ du rayon incident (figure 13). Les déviations des rayons R_1 et R_2 possèdent des extrema respectivement pour $\theta = 153^\circ$ et $\theta = 101^\circ$ (valeurs calculées pour $n = 1,457$, indice de la silice quand $\lambda = 633 \text{ nm}$). Ces rayons sont donc responsables du premier et du deuxième arc en ciel. De la position de ces arcs-en-ciel on peut, a priori, déduire l'indice de la fibre [4].

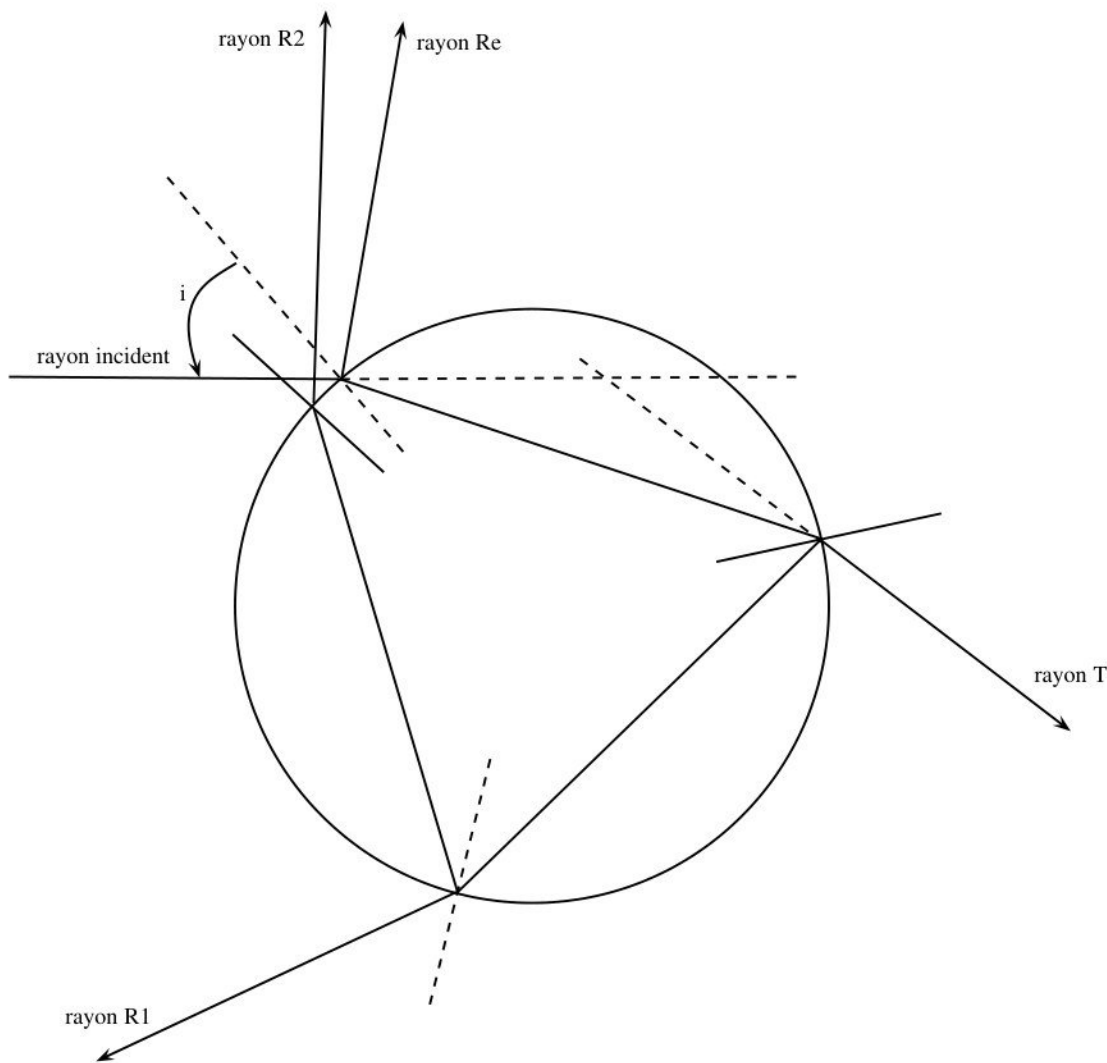


Figure 12: La figure montre les quatre rayons secondaire issus du même rayon incident.

La figure 13 montre qu'entre 101° et 153° , il n'existe que le rayon réfléchi d'où une assez faible quantité de lumière diffusée dans cette zone.

Par contre lorsque θ est inférieur à 80° , il existe deux rayons, l'un R_e est réfléchi à la surface de la fibre, l'autre T est réfracté. Ces deux rayons ne correspondent pas à la même valeur des paramètres d'impact donc pas au même rayon incident (figure 14). Les ondes partielles associées à ces deux rayons peuvent interférer à l'infini. Les amplitudes que l'on doit associer à ces ondes partielles dépendent de la valeur des coefficients de réflexion et de transmission de Fresnel à l'interface fibre-air. Lorsque le faisceau incident est polarisé parallèlement à l'axe de la fibre, les amplitudes des deux ondes sont équivalentes [2]. Ceci explique le bon contraste des franges.

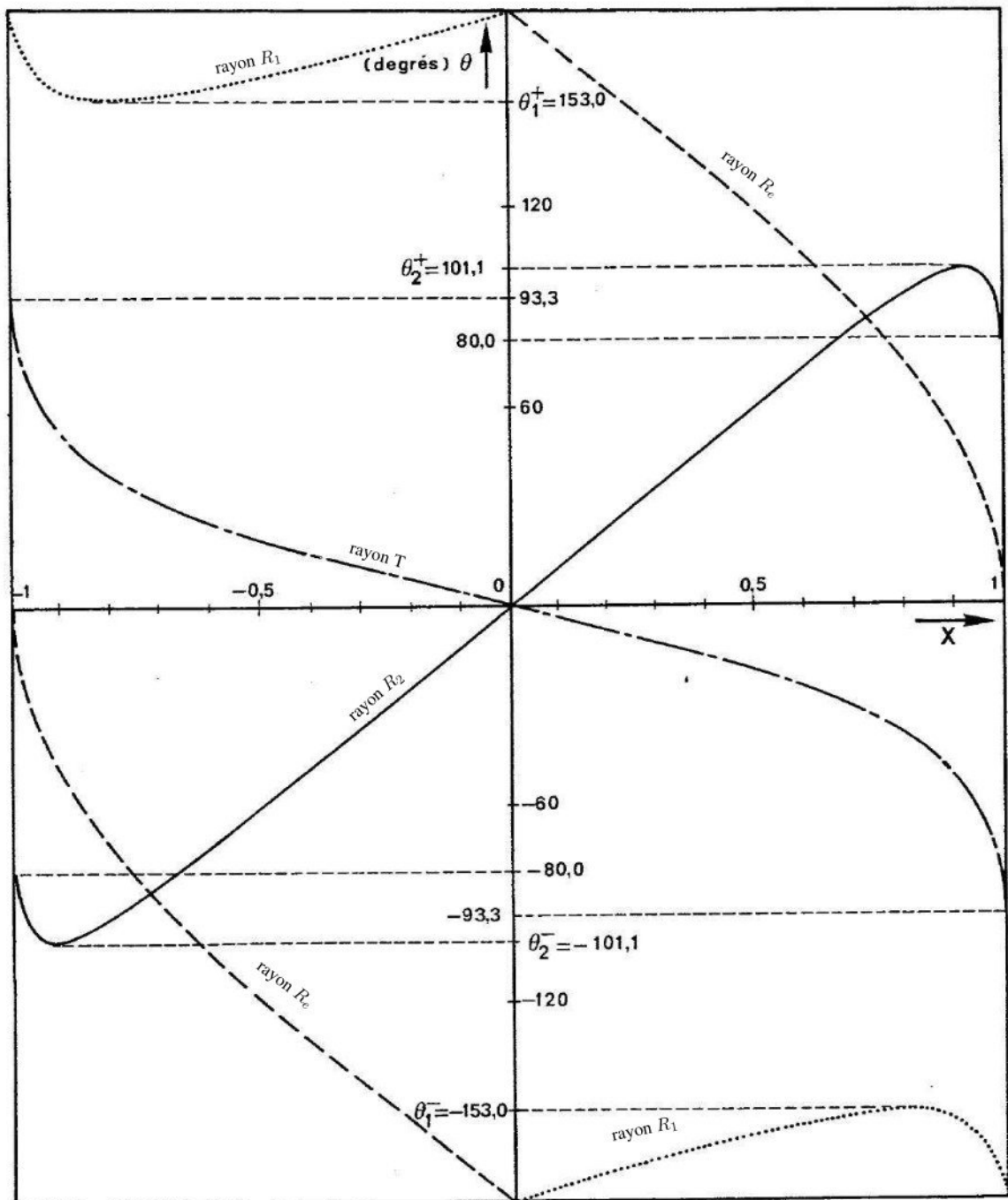


Figure 13: Déviation des rayons en fonction du paramètre d'impact X sur la fibre.

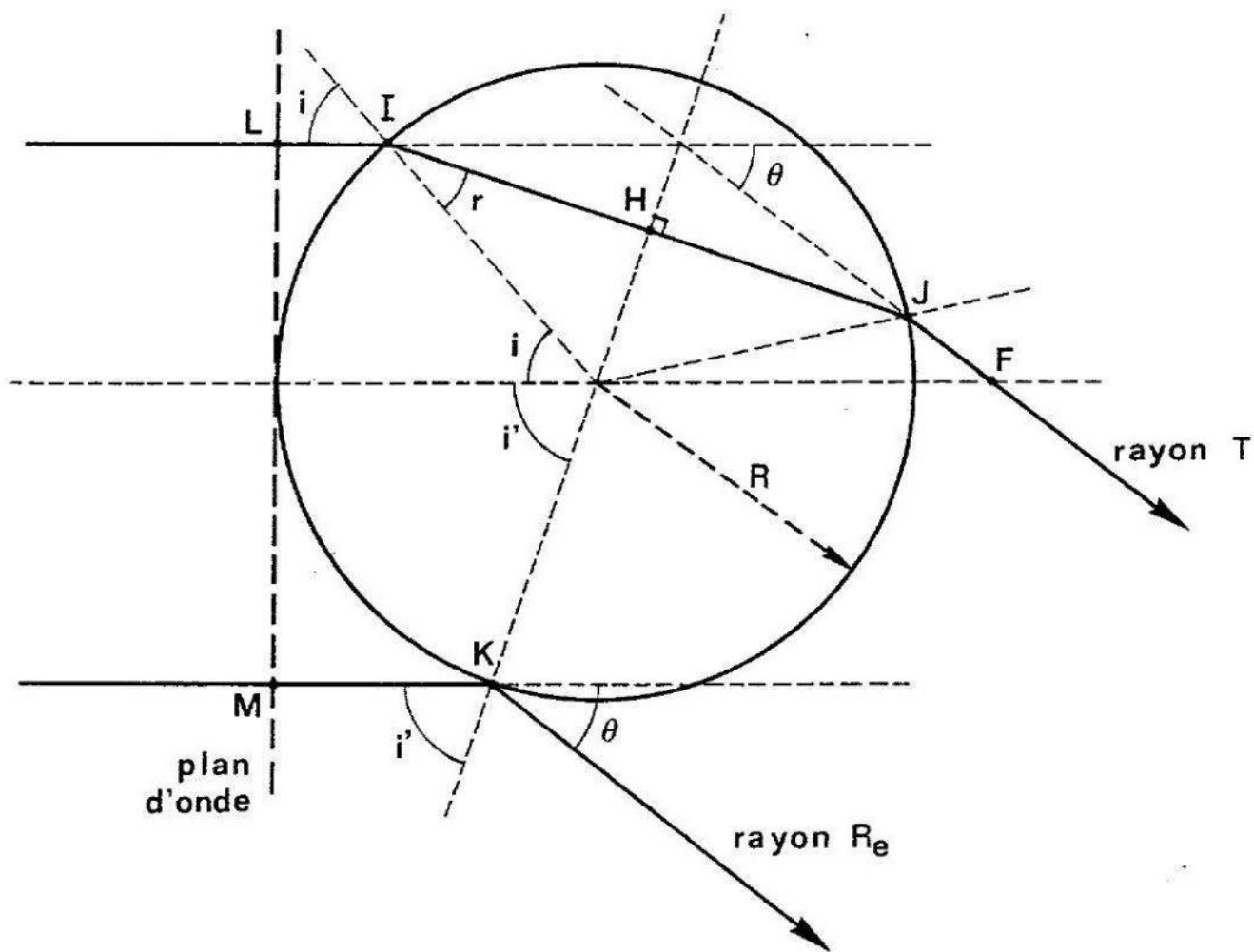


Figure 14: La figure montre la différence de marche entre les deux rayons R_e et T déviés dans la même direction.

La différence de marche géométrique entre les deux ondes s'écrit en fonction de θ et de n :

$$\delta = Df(n, \theta)$$

où D est le diamètre de la fibre et $f(n, \theta)$ est donnée par :

$$f(n, \theta) = \sin(\theta/2) + \sqrt{n^2 + 1 - 2n \cos(\theta/2)}$$

Le nombre N de franges entre deux angles θ_m et θ_M donnés ($\theta_m < \theta_M$) est donc tel que :

$$N\lambda = D[f(n, \theta_M) - f(n, \theta_m)]$$

Nous avons vérifié que ce nombre N est identique à celui que l'on peut calculer à l'aide de la méthode de Mie [2]. Par conséquent il est ainsi possible de déterminer le diamètre D de la fibre, si son indice est connu, en comptant le nombre de franges entre deux angles donnés.

Expérience

Le dispositif expérimental est schématisé sur la figure 15. L'élément principal est un goniomètre BOUTY utilisé pour déterminer l'angle et l'indice d'un prisme. Pour cette expérience le collimateur qui permet d'obtenir un faisceau de rayons parallèles et la plateforme qui supporte le prisme ne sont pas nécessaires. Seuls sont conservés la lunette réglée sur l'infini et le dispositif de mesure des angles.

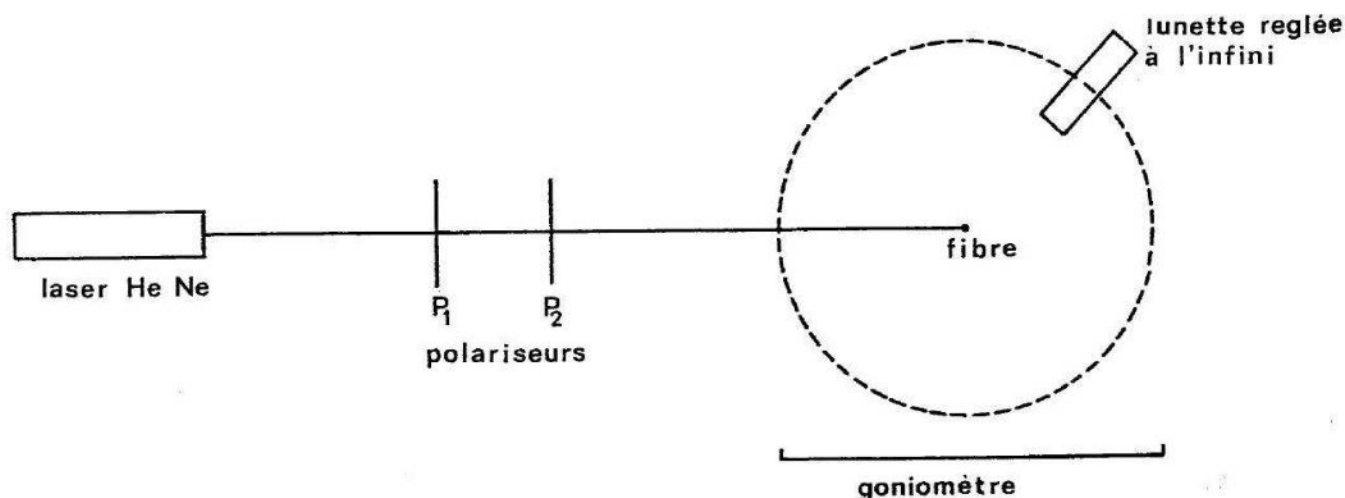


Figure 15: Schéma du dispositif expérimental.

L'échantillon de fibre est maintenu dans le mandrin d'une mini perceuse ou plus simplement avec de la pâte à modeler. Il est éclairé par le faisceau d'un laser Hélium Néon de 2 mW, perpendiculaire à l'axe de la fibre. Le polariseur P_2 permet de rendre la polarisation de l'onde incidente parallèle à l'axe de la fibre. L'orientation du polariseur P_1 modifie la quantité de lumière reçue par la lunette. Quand les deux polariseurs sont pratiquement croisés, il est possible d'observer le phénomène d'interférence sans dommage pour l'œil. L'utilisation de lunettes de protection n'est pas nécessaire.

Dans un premier temps, on repère l'abscisse angulaire α_0 du maximum de diffraction qui correspond à la direction du faisceau incident (ATTENTION : pas de visée directe dans ce cas).

La valeur de α_0 peut être déterminée en observant la lumière sur un écran situé après la lunette). Ensuite on repère les abscisses angulaires α_m et α_M de deux franges sombres et le nombre N de franges entre α_m et α_M . Pour calculer D on utilise la relation précédente dans laquelle $\theta_M = \alpha_M - \alpha_0$ et $\theta_m = \alpha_m - \alpha_0$.

Nous avons étudié une fibre dont le diamètre nominal est $200 \mu m$. Le nombre de franges entre $\theta_m = 18,73^\circ$ et $\theta_M = 74,68^\circ$ est 257.

La valeur du diamètre est : $D = 192,7 \mu m$.

L'incertitude relative sur le diamètre est :

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{\Delta f(\theta_M) + \Delta f(\theta_m)}{f(n, \theta_M) - f(n, \theta_m)}$$

où Δf est l'incertitude sur la fonction $f(n, \theta)$ due à une incertitude de mesure sur θ :

$$\Delta f = \frac{df}{d\theta} \Delta \theta$$

En première approximation, la fonction $f(n, \theta)$ varie linéairement avec θ entre 20° et 70° . On peut donc écrire :

$$f(n, \theta_M) - f(n, \theta_m) \approx K(\theta_M - \theta_m); \quad \Delta f = K \Delta \theta$$

où K est une constante.

D'autre part l'expérience montre que l'incertitude de mesure $\Delta \theta$ sur la position angulaire d'une frange repérée dans la lunette est de l'ordre du sixième de l'interfrange.

L'interfrange moyen vaut $\theta_M - \theta_m / N$ donc $\Delta \theta \approx (\theta_M - \theta_m) / 6N$.

En définitive, la précision sur le diamètre est approximativement : $\Delta D / D \approx 1/3N$.

Elle est d'autant plus faible que N est grand. Pour la fibre que nous avons étudiée : $\delta D / D \approx 0,15\%$ et nous pouvons écrire :

$$D = (192,7 \pm 0,3) \mu m$$

Le nombre de franges est proportionnel au diamètre de la fibre. Pour éviter une expérience trop pénible, on peut étudier une fibre utilisée pour les télécommunications dont le diamètre extérieur est $125 \mu m$. L'indice d'une telle fibre n'est pas uniforme mais la différence d'indice entre le cœur et la gaine est suffisamment faible pour que les calculs précédents soient valables.

Bibliography

- [1] H.C. VAN DE HULST, Light scattering by small particles (1957) New-York : John Wiley.
- [2] H. GAGNAIRE, Thèse d'état (1985) Saint-tienne.
- [3] H.M. NUSSENZWEIZ, Scientific American (1977) no 4, p. 116.
- [4] H.M. PRESBY, J. Opt. Soc. Am. (1974) : 64 , p. 280.