المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

Centre Régional des Métiers de l'Éducation et de Formation-Grand Casablanca

Concours d'Entrée Au Cycle de Préparation À l'Agrégation de Physique

ÉPREUVE DE PHYSIQUE I

Durée 4 heures

Cette épreuve comporte 13 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *autorisé*

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/4219 - Wadifa Info - page 1/15

- *On veillera à une présentation claire et soignée des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.*
- *Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant clairement les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*
- *Toutes les réponses devront être très soigneusement justifiées.*
- *Si un résultat donné par l'énoncé est non démontré, il peut néanmoins être admis pour les questions suivantes. Ainsi, les diverses parties du problème sont relativement indépendantes entre elles.*

À PROPOS DE LA FORMATION DES ÉTOILES

Il y a plusieurs centaines de milliards
de galaxies dans l'univers, et il y'a autant d'étoiles
dans une galaxie qu'il y'a de galaxies dans l'univers.....

La figure (1) ci-contre est une photo de la nébuleuse de l'Aigle, elle est considérée comme un site de formation d'étoile. Sur la photo on voit un grand nuage de gaz composé en grande partie d'hydrogène mais aussi de traces de molécules organiques complexes. Suite à un événement extérieur et proche ; onde de choc résultante d'une explosion d'autre étoile ou onde de densité d'un bras spirale de la galaxie, des fragments de ce nuage vont s'effondrer et se concentrer et leurs températures augmentent pour former des systèmes appelés proto-étoiles. Au début de leur vie, les étoiles se forment par groupes dans un intervalle de temps court par rapport à l'échelle cosmique et finiront par s'éloigner les unes des autres.

Nous aborderons dans ce problème quelques aspects élémentaires relatifs à la formation des étoiles à partir d'une nébuleuse gazeuse sphérique peu dense.



Figure 1: M16, la nébuleuse de l'Aigle, dans la constellation du Serpent

Le sujet comporte trois parties totalement indépendantes à l'intérieur desquelles de nombreuses questions peuvent être traitées indépendamment les unes des autres. La première partie traite d'une manière historique quelques modèles étudiant le comportement de la stabilité d'un atome d'hydrogène. La deuxième partie traite un modèle théorique simple illustrant le critère de formation d'une étoile à partir d'un nuage de gaz d'hydrogène. La troisième partie s'intéresse à la simulation d'un élément de radiotélescope.

Une grande attention sera portée à la rédaction et aux applications numériques. Les résultats exprimés en unités SI ne seront évidemment pas pénalisés pour autant.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو
Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/4219 - Wadifa Info - page 2/15

Données numériques

- Vitesse de la lumière : $c = 3,0.10^8\ m.s^{-1}$;
- Constante de gravitation : $G = 6,7.10^{-11}\ m^3kg^{-1}s^{-2}$;
- Constante de Planck : $h = 6.6.10^{-34}\ J.s$ et $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ represente la constante réduite de Planck ;
- Constante de Boltzmann : $K_B = 1.4.10^{-23}\ J.K^{-1}$;
- Constante de Stefan : $\sigma = 5,7.10^{-8}\ W.m^{-2}.K^{-4}$;
- Masse du Soleil : $M_S = 2,0.10^{30}\ kg$;
- Rayon du Soleil : $R_S = 7,0.10^8\ m$;
- Luminosité solaire : $L_S = 3.8.10^{26}\ W$;
- Masse de Jupiter : $M_J = 2,0.10^{27}\ kg$;
- $4\pi\epsilon_0 = \frac{1}{9.10^9}\ F.m^{-1}$;
- Charge élémentaire : $e = 1,6.10^{-19}\ C$;
- Masse de l'électron : $m = 9,1.10^{-31}\ kg$;
- Masse de proton : $m_p = 1,6.10^{-27}\ kg$;
- Masse d'un atome de nombre de masse A : $M = A.1,67.10^{-27}\ kg$;
- Nombre de masse de l'Or : $A = 197$;
- Numéro atomique de l'Or : $Z = 79$;
- Electron-volt : $1eV = 1.6.10^{-19}\ J$.

Rappels concernant les ellipses

- En coordonnées polaires avec origine au foyer, l'équation d'une ellipse peut se mettre sous la forme : $r = \frac{p}{1+e\cos(\theta)}$ où p est le paramètre de l'ellipse et e son excentricité.
- $a^2 = b^2 + c^2$
- $e = \frac{c}{a}$ et $p = \frac{b^2}{a}$
- L'aire de l'ellipse est : $S = \pi ab$

Rappels de cinématique

- Pour un mouvement à accélération centrale, on peut établir une formule de Binet donnant l'accélération en coordonnées polaires : $\vec{a} = -\frac{C^2}{r^2}[\frac{d^2}{d\theta^2}(\frac{1}{r}) + \frac{1}{r}]\vec{u}_r$, où C désigne la constante des aires.

Définitions et Formules mathématiques

- Une fonction à plusieurs variables $f(x_1, x_2, ..., x_N)$ est dite homogène de degré p si pour tout réel α on a :

$$f(\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_N) = \alpha^p f(x_1, x_2, ..., x_N)$$

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/4219 - Wadifa Info - page 3/15

- Théorème d'Euler : une fonction $f(x_1, x_2, ..., x_k)$ est homogène de degré p vérifie :

$$pf(x_1, x_2, ..., x_k) = \sum_{n=1}^{n=k} x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

- On définit la moyenne temporelle $< f(t) >$ d'une fonction $f(t)$ par :

$$< f(t) >= \lim_{t->\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(x)dx$$

- On note $\underline{x}$ la grandeur complexe associée à la grandeur réelle x et j le nombre complexe tel que $j^2 = -1$.

1. Atome d'hydrogène

Dans cette partie, on se propose de traiter d'une manière historique quelques modèles classiques étudiant le comportement de la stabilité d'un atome.

1.1. Modèle de Thomson

Le physicien S.J.J. Thomson (1904) modélise l'atome d'hydrogène par une sphère de rayon a uniformément chargée et de charge totale $+e$. À l'intérieur de la sphère, se trouve une charge ponctuelle négative $-e$ de masse m, représentant l'électron, qui se déplace librement. La position de l'électron est repérée par $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, avec O est l'origine du repère $R(O, x, y, z)$ supposé galiléen. Dans toute la suite, on néglige l'interaction gravitationnelle.

1.1.1. Montrer que l'électron est soumis à la force électrique $\vec{F} = -k\vec{r}$, avec $k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3}$. Quel est le nom classique donné à ce modèle ?

1.1.2. Trouver l'équation vectorielle du mouvement de l'électron. On suppose que $\vec{r}(t = 0s) = r_0\vec{e}_x$ et $\vec{v}(t = 0s) = v_0\vec{e}_y$, trouver la nature de la trajectoire. On pose $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

1.1.3. Exprimer, en fonction des données, la longueur d'onde λ_0 associée au mouvement de l'électron. Calculer la valeur numérique de λ_0. Dans quel domaine du spectre électromagnétique se situe-alle ? on donne $a = 0.1\ nm$.

On soumet l'atome d'Hydrogène à une onde électromagnétique plane progressive harmonique (OPPH) dont la fonction d'onde associée est $\vec{E}(M, t) = E_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r}\right)\vec{e}_z$.

Avec ω la pulsation de l'onde et $\vec{k}$ le vecteur d'onde associé. On s'intéresse par la suite au mouvement de l'électron suivant l'axe (Oz) et on suppose que la longueur d'onde de l'OPPH vérifie $\lambda >> a$.

1.1.4. Montrer que, dans ces hypothèses, on peut considérer que le champs électrique est uniforme à l'intérieur de l'atome.

1.1.5. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'électron.

1.1.6. Donner la solution $\underline{z}(t)$ en régime établi.

1.1.7. On suppose que l'onde incidente est dans le domaine visible. Montrer que la solution est :

$$z(t) = -\frac{eE_0}{m\omega_0^2} \cos\omega t$$

1.1.8. L'atome d'hydrogène peut être considéré comme un dipôle rayonnant. Exprimer son moment dipolaire $\vec{p}(t)$.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/4219 - Wadifa Info - page 4/15

1.1.9. A partir des équations de Maxwell, on montre que la puissance moyenne temporelle rayonnée dans tout l'espace par un dipôle, de moment dipolaire $p(t) = p_0 \cos(\omega t)$, dans la zone de rayonnement est donnée par :

$$P = \frac{1}{3}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\omega^4 p_0^2}{c^3}$$

Montrer que $P = \frac{A}{\lambda^4}$ avec A une constante positive qu'on exprimera en fonctions des données.

1.1.10. Montrer que le modèle de Thomson permet d'expliquer la couleur bleue du ciel. Pour faire, on suppose que les atomes de l'ionosphère, sous l'action des rayons solaires, se comportent comme ceux de l'hydrogène.

1.2. Modèle de Rutherford

Pour vérifier la validité du modèle de Thomson, le physicien anglais Ernest Rutherford réalisa en 1908 l'expérience décrite sur la figure (2). En bombardant une mince feuille d'Or par des noyaux d'Helium ^4_2He (particules α) émis par un élément radioactif, il constate que la la majorité des particules ont traversé la feuille en subissant des déviations et quelques rares particules ont rebondi, c'est à dire elles ont subit une déviation d'un angle supérieur à 90^0, ont dit qu'elles sont rétrodiffusées.

Pour modéliser cette expérience, on suppose qu'une particule α est une charge ponctuelle de charge $+2e$ et de masse m_α se déplaçant dans le champs électrostatique créé par un noyau atomique d'Or de masse M et de charge $+Ze$ et supposé immobile au point O origine du référentiel $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ du laboratoire supposé galiléen. On suppose que la particule α vient de l'infini avec une vitesse $\vec{v}_0$ sous un paramètre d'impact b, voir figure (3). On suppose que lors de la diffusion le noyau d'Or reste immobile.

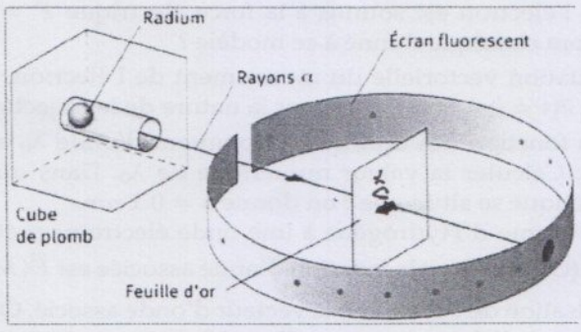


Figure 2: Dispositif de l'experience de Rutherford

1.2.1. Insuffisance du modèle de Thomson

1.2.1.1. En utilisant le modèle de Thomson, montrer que la particule α subit une force maximale F_{max} pour $r = a$. Évaluer numériquement F_{max} sachant que $a = 0,1\ nm$ représente le rayon du noyau d'Or.

1.2.1.2. On donne $v_0 = 1,6.10^6\ m.s^{-1}$, la vitesse initiale de la particule α et on suppose que la particule α est soumise à la force F_{max} dans la zone Δx où se trouve le noyau d'Or. Calculer, en dégré, ψ_m la valeur de l'angle de déviation maximale.

1.2.1.3. La feuille d'Or utilisée comporte 400 plans atomiques juxtaposés. Évaluer la déviation finale de la particule α. Que peut-on conclure sur la confrontation du modèle de Thomson avec les résultats expérimentaux ?

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/4219 - Wadifa Info - page 5/15

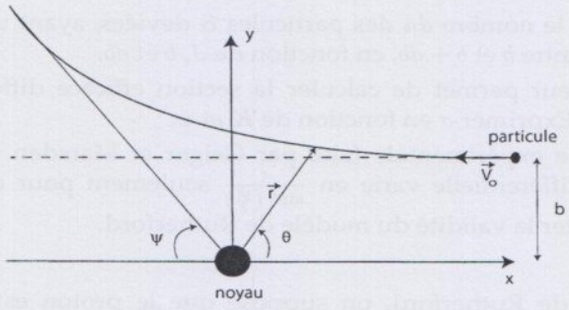


Figure 3: Diffusion de Rutherford

Pour interpréter les résultats expérimentaux, Rutherford proposa le modèle suivant : la charge positif se trouve dans un noyau supposé quasi-ponctuel autour duquel gravitent les électrons sous l'action de la force électrostatique.

1.2.1.4. Pourquoi nomme-t-on le modèle de Rutherford "modèle planétaire " ?

1.2.1.5. Montrer que le moment cinétique, noté $\vec{L}_0$, de la particule α se conserve. Déduire le plan de la trajectoire. On munit ce plan d'un repère (O, x, y) et on fait l'étude avec les coordonnées polaires (r, θ).

1.2.1.6. On définit le vecteur de Laplace par $\vec{A} = \vec{v} \wedge \vec{L} + \beta \vec{e}_r$ où β est une constante positive. Montrer que $\vec{A}$ se conserve pour une valeur de β que l'on déterminera en fonction des données.

1.2.1.7. Exprimer $E_p(r)$ l'énergie potentielle de l'interaction électrostatique en supposant qu'elle est nulle quand la particule α est à l'infini.

1.2.1.8. Déterminer $E(0)$ l'expression de l'énergie mécanique du système à $t = 0\ s$, l'instant où l'on suppose la particule à l'infini. Déduire la nature de la trajectoire.

1.2.1.9. Montrer que l'énergie mécanique s'écrit :

$$E = \frac{1}{2} m_\alpha \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m_\alpha \frac{v_0^2 b^2}{r^2} + \frac{\beta}{r}$$

1.2.1.10. Montrer que le mouvement est possible tant que r est supérieure à une valeur r_m que l'on déterminera.

1.2.1.11. On note $\vec{v}_f$ le vecteur vitesse de la particule α quand elle est de nouveau à l'infini après diffusion. Exprimer, dans la base du repère du laboratoire, le vecteur $\vec{v}_f$.

1.2.1.12. En utilisant la conservation du vecteur de Laplace, montrer que l'angle de déviation de la particule α est relié au paramètre d'impact b par la relation suivante :

$$b = \frac{K}{\tan\left(\frac{\psi}{2}\right)}$$

Avec $K = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_\alpha v_0^2}$.

1.2.2. **Insuffisance du modèle de Rutherford**

En réalité l'expérience est faite avec un faisceau homocinétique de particules α dont la densité surfacique J, nombre de particule α par unité de surface perpendiculaire à l'axe (Ox), est uniforme. On place un détecteur de particules α selon la direction de l'angle solide $d\Omega = 2\pi \sin(\psi) d\psi$, sous lequel est vu le détecteur à partir de la cible. Le détecteur compte le nombre de particules se trouvant entre ψ et $\psi + d\psi$.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/4219 - Wadifa Info - page 6/15

1.2.2.1. Exprimer le nombre dn des particules α deviées, ayant un paramètre d'impact compris entre b et $b + db$, en fonction de J, b et db.

1.2.2.2. Le détecteur permet de calculer la section efficace différentielle de diffusion $\sigma = \frac{dn}{Jd\Omega}$. Exprimer σ en fonction de K et ψ.

1.2.2.3. Une étude expérimentale faite par Geiger et Marsden montre que la section efficace différentielle varie en $\frac{1}{\sin^4\left(\frac{\psi}{2}\right)}$ seulement pour des angles $\psi < 150^0$. Commenter la validité du modèle de Rutherford.

1.3. Modèle de Bohr

Dans le modèle de Rutherford, on suppose que le proton est fixe à l'origine d'un référentiel galiléen atour duquel l'électron effectue un mouvement circulaire de rayon $r = OM$.

1.3.1. Déterminer la relation entre la vitesse v et le rayon r de l'orbite circulaire.

1.3.2. Exprimer l'énergie totale en fonction de r, e et ϵ_0. On note E_0 la valeur de cette énergie pour $r = a = 0,53.10^{-10}\ m$. Calculer, en électron-Volt, la valeur de E_0.

1.3.3. Exprimer, en fonction de r, le module du moment cinétique de l'électron $\vec{L}_O$ par rapport à l'origine O dans le référentiel d'étude.

1.3.4. La puissance rayonnée dans le vide par une charge q, d'accélération a, est approximativement donnée par :

$$P(t) = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} a^2$$

Rappeler le théorème qui décrit ce type de rayonnement.

1.3.5. Déterminer l'équation différentielle que doit vérifier l'énergie totale $E(t)$. Discuter alors la validité de ce modèle.

1.3.6. Exprimer la période T de l'orbite circulaire en fonction de r. Sachant que l'expérience montre que le spectre d'émission de l'Hydrogène contient des raies discrètes, montrer une autre insuffisance du modèle de Rutherford.

1.3.7. Rappeler les hypothèses de Bohr. Montrer que l'énergie de l'atome est quantifiée et qu'elle s'écrit sous la forme $E_n = -\frac{E_i}{n^2}$. Exprimer E_i.

1.3.8. Évaluer le rayon orbital r_1 et l'énergie E_1 correspondant à l'état fondamental.

1.3.9. Les radiations émises par l'atome d'Hydrogène dans le domaine visible ont été découvertes expérimentalement par Balmer. Ces radiations sont définies par la série :

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right)$$

avec $n = 3, 4, 5, ...$ et $R_H = 109677\ cm^{-1}$ la constante de Balmer. Déterminer les longueurs d'onde λ_α, λ_β, λ_γ et λ_δ correspondant à $n = 3, 4, 5, 6$.

1.3.10. Quelle est la valeur limite λ_l de la longueur d'onde qui correspond à cette série ?

1.3.11. En utilisant le modèle de Bohr, retrouver la série de Balmer. Calculer R_H et la comparer à la valeur expérimentale. Conclure.

1.3.12. Montrer que si le proton est mobile on retrouve la même série de Balmer à condition de remplacer la constante de Balmer par la constante de Rydberg R qui est donnée par :

$$R = \frac{R_\infty}{1 + \frac{m}{m_p}}$$

Calculer $\frac{R_\infty - R}{R_\infty}$. Commenter.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/4219 - Wadifa Info - page 7/15

1.4. Modèle de Wilson-Sommerfeld

Le modèle de Bohr se base sur la quantification des orbites circulaires à force centrale coulombienne. La partie précédente montre qu'à partir de ce modèle on retrouve la loi empirique de Balmer. Des études expérimentales de spectroscopie montrent qu'on obtient des raies de la série de Balmer plus éclatées, elles sont constituées de plusieurs raies très fines et très resserrées par rapport à celles prévues par la série de Balmer, ces raies sont appelées multiplet et on parle de structure fine de l'atome d'Hydrogène. Sommerfeld et Wilson proposèrent le modèle des orbites elliptiques à force centrale qui sont décrites avec les deux degrés de liberté r et θ. Le modèle proposé par Wilson-Sommerfeld permet l'introduction de deux nombres quantiques n_r radial et n_θ azimutal. En réalité Sommerfeld et Wilson ont proposé, indépendamment, une méthode de quantification de l'action en physique classique. Cette quantification n'est valable que si la cordonnée q et son moment conjugué p sont périodiques dans le temps, dans ce cas la condition de quantification s'écrit :

$$\int_{cycle} pdq = nh$$

n un entier et h la constante de Planck.

1.4.1. Oscillateur harmonique

On considère un oscillateur harmonique horizontal, constitué d'une masse m attachée à l'extrémité d'un ressort de raideur k. La masse oscille sans frottement suivant l'axe (O, x). On pose $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

1.4.1.1. En appliquant le PFD à la masse, trouver l'équation différentielle du mouvement.

1.4.1.2. Exprimer $x(t)$ et $p_x(t)$ sachant que $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$. On pose x_0 l'amplitude de l'oscillation qu'on exprimera en fonction de v_0 et ω.

1.4.1.3. Montrer que l'énergie mécanique est constante. Donner sa valeur en fonction de x_0 et des autres données.

1.4.1.4. Appliquer la condition de quantification de Wilson-Sommerfeld puis trouver x_0^2 en fonction de n.

1.4.1.5. Déduire alors que l'énergie de l'oscillateur est quantifiée. Exprimer E_n en fonction de n, ω et $\hbar$.

1.4.2. Atome d'hydrogène

On suppose que le proton de masse M et de charge $+e$ est fixe à l'origine O du repère supposé galiléen. L'électron, de masse m et de charge $-e$, tourne autour du proton sous l'action de la force coulombienne seulement $\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{e}_r$. k est une constante positive.

1.4.2.1. Montrer que la trajectoire est plane. On travaille par la suite avec les cordonnées polaires (r, θ).

1.4.2.2. Montrer que l'équation, en cordonnées polaires, est sous la forme :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$$

avec $p = m\frac{C^2}{k}$ et $e = mA\frac{C^2}{k}$. $C = r^2\dot{\theta}$ représente la constante des aires et A une constante positive.

1.4.2.3. Quelle est la nature de la trajectoire ?

1.4.2.4. Retrouver la troisième loi de Kepler.

1.4.2.5. On s'intéresse par la suite à l'orbite elliptique de demi-grand axe a et demi-petit axe b sachant que le grand axe est confondu avec l'axe polaire. Montrer que l'énergie mécanique du système est constante et qu'elle s'écrit sous la forme : $E_m = -\frac{k}{2a}$.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/4219 - Wadifa Info - page 8/15

1.4.2.6. Écrire la condition de quantification de Wilson-Sommerfeld. Montrer que la quantification de l'action donne deux quantifications, une radiale et l'autre azimutale.

1.4.2.7. Montrer que la quantification azimutale donne $mC = n_\theta \hbar$.

1.4.2.8. Montrer que la quantification radiale se traduit par :

$$2\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{-\alpha^2 + 2\beta\frac{1}{r} - \frac{m^2C^2}{r^2}}dr = n_r h$$

avec r_1 et r_2 sont les racines de l'équation $-\alpha^2 + 2\beta\frac{1}{r} - \frac{m^2C^2}{r^2} = 0$. Exprimer α et β en fonction de l'énergie E et les autres données du problème.

1.4.2.9. On admet que :

$$\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{-\alpha^2 + 2\beta\frac{1}{r} - \frac{m^2C^2}{r^2}}dr = \pi\left(\frac{\beta}{\alpha} - mC\right)$$

Montrer que l'énergie de l'atome est quantifiée et qu'elle s'écrit sous la forme :

$$E_{n_r,n_\theta} = \frac{E_0}{(n_r + n_\theta)^2}$$

1.4.2.10. Discuter la structure fine de l'atome d'hydrogène.

1.5. **Puits de potentiel**

Dans de nombreuses situations quantiques, des particules chargées se trouvent piégées dans des liaisons (électron dans une liaison chimique covalente conjuguée, diode laser...) sont confinées dans un potentiel sous forme d'une cuvette. On modélise cette situation par un puits de potentiel infini. On considère une particule quantique, de masse m, se déplaçant librement à une dimension à l'intérieur d'un puits de potentiel infini comme il est schématisé sur la figure (4).

1.5.1. On suppose que L est la largeur caractéristique d'un puits de potentiel à une dimension. Montrer qu'une particule quantique, de masse m, confinée dans ce puits ne peut jamais être au repos.

1.5.2. Montrer que l'énergie minimale de la particule quantique est d'autant plus grande que L est petite.

1.5.3. Écrire l'équation de Schrödinger stationnaire de la particule quantique à l'intérieur du puits. On note $\phi(x)$ la fonction d'onde de matière associée à la particule quantique.

1.5.4. Montrer que si l'énergie E de la particule est inférieure ou égale à zéro la particule quantique ne peut exister. Par la suite on suppose que $E > 0$.

1.5.5. Montrer que la partie spatiale de la fonction d'onde est quantifiée et que le mode de rang n est donné par :

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

n un entier naturel non nul.

1.5.6. Donner l'expression de la fonction d'onde totale $\phi(x)$. Justifier la réponse.

1.5.7. Montrer que l'énergie de la particule quantique est quantifiée et qu'elle est donnée par :

$$E_n = E_1 n^2$$

Exprimer E_1.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/4219 - Wadifa Info - page 9/15

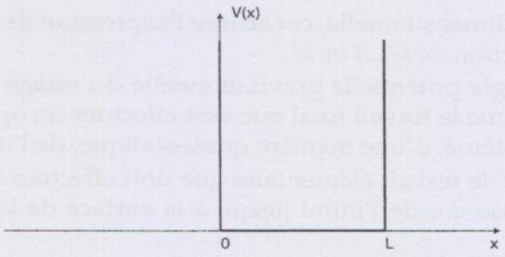


Figure 4: Puits de potentiel infini

1.5.8. Vérifier l'accord du résultat précèdent avec ceux des questions 1.5.1 et 1.5.2.

1.5.9. Tracer la densité de probabilité pour $n = 1$ et $n = 2$. Interpréter puis commenter.

2. Formation d'étoile

On considère un gaz d'Hydrogène à symétrie sphérique, de rayon R et de masse totale M, considéré comme un gaz parfait monoatomique. On suppose que le gaz est en équilibre thermique à la température cinétique T et on note U son énergie interne.

2.1. Théorème de Viriel

On considère un système (S) borné spatialement et isolé, constitué de N particules numérotées par l'indice n. Dans un référentiel (R) supposé galiléen, on note $\vec{r}_n$ le vecteur position de la particule n, de masse m_n, et par $\vec{v}_n$ son vecteur vitesse. On suppose que les interactions entre particules sont conservatives dérivant d'une énergie potentielle totale $E_p(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ...\vec{r}_N)$. Soit E_c l'énergie cinétique totale du système dans le référentiel (R).

2.1.1. Montrer que l'énergie cinétique totale du système (S) se met sous la forme :

$$E_c = \frac{d\Psi}{dt} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \vec{r}_n.\vec{F}_n$$

où Ψ une fonction qui dépend explicitement des vecteurs positions et vitesses instantanés et $\vec{F}_n$ la force exercée sur la particule n par toutes les autres particules. Donner l'expression de Ψ.

2.1.2. Montrer que la moyenne temporelle $< \frac{d\Psi}{dt} >$ est nulle.

2.1.3. Exprimer la moyenne temporelle $< E_c >$ de l'énergie cinétique totale en fonction d'une sommation de la grandeur $w_n = \vec{r}_n.\vec{F}_n$.

2.1.4. On suppose que l'énergie potentielle totale du système est une fonction homogène de degré p par rapport aux $3N$ variables (x_n, y_n, z_n). Montrer le théorème de Viriel reliant les moyennes temporelles de E_c et de E_p par :

$$2 < E_c >= p < E_p >$$

2.1.5. Calculer la valeur de p pour une interaction élastique. Que devient l'écriture du théorème de Viriel ? Commenter.

2.1.6. Calculer la valeur de p pour l'interaction gravitationnelle. Déduire que pour qu'un gaz borné soit gravitationnellement lié il faut que son énergie totale soit négative.

2.2. Interaction gravitationnelle

On suppose que la seule interaction entre particules est de type gravitationnelle.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/4219 - Wadifa Info - page 10/15

2.2.1. Par une analyse dimensionnelle, construire l'expression de T_0 grandeur homogène à un temps en fonction de G, R et M.

2.2.2. On définit l'énergie potentielle gravitationnelle du nuage sphérique de rayon R et de masse M comme le travail total que doit effectuer un opérateur pour ramener les particules du système, d'une manière quasi-statique, de l'infini à la situation finale.

2.2.2.1. Exprimer δW le travail élémentaire que doit effectuer l'opérateur pour ramener une une masse dm de l'infini jusqu' à la surface de la sphère de rayon r et de masse $m(r)$.

2.2.2.2. On suppose que la masse volumique ρ est uniforme. Montrer que l'énergie potentielle gravitationnelle du gaz est donnée par :

$$E_p = -\frac{3GM^2}{5R}$$

2.2.2.3. Commenter le signe de E_p.

2.2.3. Donner l'expression de l'énergie interne U du gaz en fonction de K_B, m_H, M et T. Avec m_H est la masse d'un atome d'Hydrogène.

2.2.4. Exprimer sous forme d'une inégalité entre E_p et U la condition pour que le gaz soit gravitationnellement lié.

2.2.5. Montrer que pour une température T et masse volumique ρ données, si le gaz possède un rayon inférieur à un rayon limite R_J, appelé rayon de Jeans, le gaz se fragmente. Donner l'expression de R_J en fonction de K_B, m_H, G, ρ et T.

2.2.6. Calculer numériquement le rayon de Jeans et la masse correspondante pour un nuage sphérique porté à une température $T = 10K$ et comportant un atome d'Hydrogène par cm^3. Comparer ces valeurs à celles du Soleil puis conclure.

2.2.7. Pour estimer la durée de l'effondrement t_{eff} à partir de la gravitation seule on adopte le modèle suivant : on découpe le nuage en des couches sphériques concentriques qu'on numérote par (k). La couche numéro k, de masse volumique $\rho_k(t)$, est comprise à l'instant t entre les rayons $r_k(t)$ et $r_k(t) + dr$ et elle est supposée fermée.

2.2.7.1. En partant de la conservation de l'énergie totale d'une couche k et en supposant que la vitesse initiale d'effondrement de cette couche est nulle, montrer que :

$$\left(\frac{dr_k}{dt}\right)^2 = 2Gm\left(\frac{1}{r_k(t)} - \frac{1}{r_k(0)}\right)$$

m représente la masse contenue dans la sphère de rayon $r_k(t)$.

2.2.7.2. On pose $r_k(t) = r_k(0)\cos^2(x_k(t))$ et on suppose que l'effondrement se fait jusqu'à un rayon nul. Montrer que le temps d'effondrement t_{eff} est donné par :

$$t_{eff} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{2r_k(0)^2}{Gm}}$$

2.2.7.3. Calculer numériquement t_f pour un nuage comportant un atome d'Hydrogène par cm^3 et de rayon $R = 10^9 R_s$.

2.3. Effet thermique

On considère de nouveau le nuage à symétrie sphérique mais dans cette partie s'ajoute aux forces gravitationnelles les forces de pression cinétique.

2.3.1. On pose $m(r)$ la masse contenue dans la sphère de rayon r et $P(r)$ la pression à la distance r. En étudiant l'équilibre hydrostatique de la masse dm contenue dans la couche sphérique comprise entre r et $r + dr$, montrer que :

$$d\left(4\pi r^3 P\right) = \left(\frac{3P}{\rho} - \frac{Gm}{r}\right)dm$$

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/4219 - Wadifa Info - page 11/15

2.3.2. Apres intégration, montrer que la pression à la surface est donnée par :

$$P(R) = \frac{3MK_BT}{4\pi R^3 m_H} - \frac{3GM^2}{20\pi R^4}$$

Pour obtenir ce résultat, on montre tout d'abord que $d\left(4\pi r^3 P\right) = 2dU + dE_p$.

2.3.3. Tracer qualitativement le graphe de $P(R)$ pour M et T données. Exprimer le rayon R_{max} correspondant au maximum de P en fonction du rayon de Jeans R_J. En déduire que l'amorçage de l'effondrement d'un nuage sur lui même est dû à une explosion proche d'une super-novae.

2.3.4. Á cause de la mort d'une étoile proche, l'effondrement du nuage d'hydrogène continue jusqu'à atteindre un rayon final R_f où les atomes d'hydrogène sont en contact. On note a le rayon atomique et on néglige la pression à la surface. Montrer que la température finale du nuage est :

$$T_f = \frac{GM^{2/3}m_H^{4/3}}{5aK_B}$$

2.3.5. Montrer que le gaz d'hydrogène s'ionise une fois que la température finale T_f dépasse largement la température $10^5\ K$.

2.3.6. On suppose que $T_f >> 10^5\ K$. Les atomes d'hydrogène sont totalement ionisés et l'effondrement continue jusque'à ce que la distance entre deux particules est de l'ordre de la longueur d'onde de Broglie des électrons $\lambda_e = \frac{h}{m_e v_e}$, où v_e est la vitesse moyenne d'agitation thermique des électrons. Exprimer λ_e en fonction de la température finale T_e.

2.3.7. Montrer que la température finale du plasma ainsi formé est donnée par :

$$T_e = \frac{3G^2M^{4/3}m_e m_H^{8/3}}{100K_B h^2 2^{2/3}}$$

2.3.8. Montrer que si $M > 0.1M_s$, alors le corps final ainsi formé est une étoile. On rappelle que la source d'énergie d'une étoile est d'origine nucléaire et les réaction nucléaires ne peuvent avoir lieu qu'à partir de $10^7\ K$. Déduire que la planète Jupiter est une étoile ratée.

2.3.9. On note par L_s la luminosité du Soleil qui n'est autre que la puissance lumineuse totale émise. Calculer la puissance surfacique E reçue par la Terre.
On donne $D = 1.5\ 10^{11}\ m$ la distance Soleil-Terre.

2.3.10. On suppose que le Soleil est, en bonne approximation, un corps noir porté à la température T_s. Rappeler la loi de Stephane-Boltzmann, en déduire la température effective du Soleil.

2.3.11. On définit le temps de Kelvin-Helmholtz, noté T_{KH}, la durée nécessaire pour qu'une étoile rayonne toute son énergie gravitationnelle en supposant que sa luminosité reste constante. Calculer T_{KH} pour le Soleil en supposant que sa masse volumique n'a pas changé. Commenter.

2.3.12. On définit le temps nucléaire, noté T_n, la durée nécessaire pour que l'étoile rayonne une fraction x de son énergie de masse sans que sa luminosité varie. Calculer $T_n(x = 10^{-3})$ pour le Soleil puis le comparer à T_{KH}. Conclure sur l'origine du rayonnement d'une étoile.

3. Simulation d'un élément de radiotélescope

Inauguré en 1965, le radiotélescope de Nançay a été créé pour étudier le décalage Doppler de la raie 21cm de l'atome d'hydrogène due au couplage spin nucléaire- spin électronique.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/4219 - Wadifa Info - page 12/15

C'est un moyen privilégié d'étude de la cinématique de l'hydrogène interstellaire, et donc des mouvements dans l'univers. De 1956 à 1967, de nombreux chercheurs ont travaillé à la très délicate mise au point de la chaîne de réception suivante.

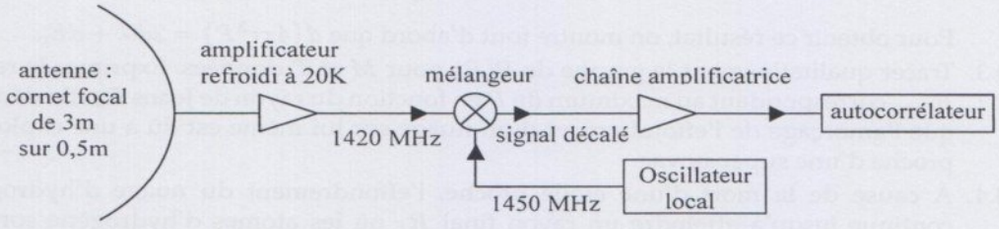


Figure 5: Simulation d'un élément de radiotélescope

On se propose de reproduire simplement le principe d'un mélangeur en TP en se plaçant 6 décades plus bas en fréquence.

3.1. **Dédoublement de fréquence**

$a(t) = A\cos(2\pi f_a t)$ et $e_0(t) = E_0\cos(2\pi f_0 t + \phi_0)$ sont deux tensions mises aux entrées d'un multiplieur. Leurs fréquences résepctives sont $f_a = 1420Hz$ et $f_0 = 1450Hz$.

On obtient en sortie du multiplieur une tension : $m(t) = ka(t).e_0(t)$.

Le coefficient de proportionalié k vaut : $k = 0,1V^{-1}$.

3.1.1. Linéariser le signal à la sortie du multiplieur et justifier que le spectre en fréquence de $m(t)$ est composé de deux fréquences f et $f' > f$. On donnera les valeurs numériques des fréquences f et $f' > f$.

3.1.2. Représenter l'allure du spectre en amplitude du signal $m(t)$.

3.2. **Filtrage**

On souhaite filtrer la tension $m(t)$.

3.2.1. Le diagramme de Bode du filtre étudié est donné par les figures (6) et (7).

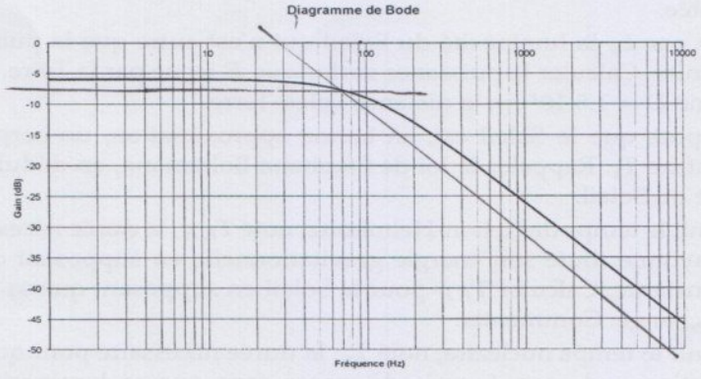


Figure 6: Diagramme de Bode en gain

3.2.1.1. Indiquer, en le justifiant, la nature et l'ordre du filtre.

3.2.1.2. Déterminer graphiquement et en justifiant la démarche suivie, la fréquence de coupure f_c du filtre à $-3dB$.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو
Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/4219 - Wadifa Info - page 13/15

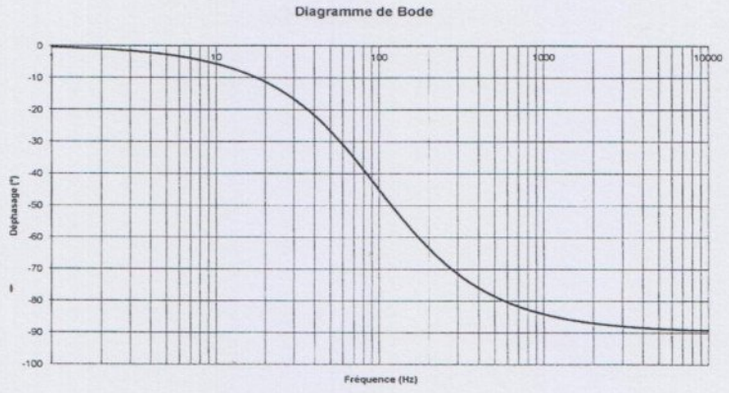


Figure 7: Diagramme de Bode en phase

Pour filtrer la tension $m(t)$, on utilise alors le filtre de la figure (8).

3.2.2. Proposer un câblage pour caractériser le filtre étudié à l'aide d'un oscilloscope et d'un GBF. Proposer une méthode permettant rapidement de déterminer la fréquence de coupure du filtre à l'aide d'un oscilloscope.

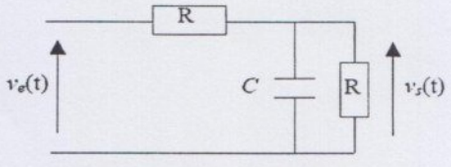


Figure 8: Filtre

3.2.3. Montrer que la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v_s}(t)}{\underline{v_e}(t)}$ du filtre se met sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Exprimer H_0 et ω_0 en fonction de R et C.

3.2.4. En dessinant un schéma équivalent en BF (Basse Fréquence), puis un autre en HF (Haute Fréquence), déterminer sans calcul le type de ce filtre. Déterminer les droites asymptotiques dans le diagramme de Bode en gain et en phase.Vérifier votre affirmation faite dans la question 3.2.1.1.

3.2.5. Déterminer la pulsation de coupure ω_c du filtre en fonction de R et C.

3.2.6. À l'aide du diagramme de Bode ci-dessus, donner la valeur numérique du produit RC et celle de H_0.

3.2.7. En haute fréquence, pourquoi parle-t-on d'une intégration ? Comment vérifie-t-on cette propriété sur le diagramme de Bode en gain ? Vers quelle valeur tend alors le déphasage de $v_s(t)$ par rapport à $v_e(t)$?

3.3. **Le mélangeur**

On place à l'entrée de ce filtre le signal $m(t)$. La sortie est alors :

$$v_s(t) = V_s \cos(2\pi f t + \phi_s) + V_s' \cos(2\pi f' t + \phi_s').$$

3.3.1. Déterminer la valeur numérique de $\frac{V_s}{V_s'}$ à partir du diagramme de Bode.

3.3.2. Sachant que l'atténuation de la véritable chaîne de réception est bien supérieure, en déduire la valeur de la fréquence du signal décalé de la chaîne originale.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/4219 - Wadifa Info - page 14/15

Wadifa Info

www.wadifa-info.com

Le sujet suivant à préparer — النموذج التالي للتحضير

نموذج مباراة ولوج مسلك تكوين أطر الإدارة التربوية - اختبار في علوم التربية - دورة 2025

Modèle : Concours d'accès à la filière de formation des cadres de l'administration pédagogique - épreuve de sciences de

www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/1329

Chaîne WhatsApp — قناة واتساب

المباريات الجديدة والنتائج كل يوم

Nouveaux concours et résultats chaque jour

wadifa-info.com/wa

Chaîne YouTube — قناة يوتيوب

امتحانات تجريبية بالتصحيح، بالدارجة

Examens blancs corrigés, expliqués en darija

youtube.com/@wadifainfo

Envoyer à un ami — أرسل النموذج لصديق

شارك هذا النموذج على واتساب مع من يحضّر معك

Partagez ce sujet sur WhatsApp

wa.me