المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية

المركز الجهوي لمهن التربية والتكوين

جهة الرباط سلا زمور زعير

Concours d'accès au cycle de préparation à l'agrégation de Mathématiques

Session Février 2014

Épreuve d'Analyse et Probabilité

Durée 4 heures

Le sujet comporte 5 pages, en plus de cette page de garde.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/4215 - Wadifa Info - page 1/7

Important

L'épreuve est constituée de trois exercices et d'un problème. Le candidat est libre de traiter le sujet dans l'ordre qui lui convient à condition de bien mentionner les références complètes de chaque question traitée.

Les candidats sont tenus à rendre deux copies séparées même si elles sont vierges. La première contenant la résolution des trois exercices et la seconde contenant celle du problème. Dans chacune des deux copies on indiquera les références du candidat et le nombre d'intercalaires utilisés.

Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la rigueur de votre raisonnement, de la clarté de la rédaction et du soin apporté à la présentation de votre copie. Le candidat peut utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, il veillera toutefois à mentionner la référence du résultat utilisé.

Si le candidat repère ce qu'il pense être une erreur de l'énoncé, il le signale sur sa copie en expliquant les raisons qui l'ont amené à le penser. Ceci ne doit pas l'empêcher de finir son épreuve et il a le choix d'adopter les rectifications qu'il croit nécessaires ou pas.

Les calculatrices et les documents sont interdits lors de cette épreuve.

✧ ✧ ✧ ✧

Problème

Pour tout entier naturel k, on définit la fonction polynomiale Γ_k par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \Gamma_o(x) = 1\ ,\ \Gamma_1(x) = x\ ,\ \Gamma_2(x) = \dfrac{x(x-1)}{2} \\ \Gamma_k(x) = \dfrac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!} \end{cases}$$

Le but de ce problème est d'étudier la série de fonctions du type $\sum_{n\geqslant 0} a_n \Gamma_n(x)$, où x est une variable réelle et $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite réelle.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/4215 - Wadifa Info - page 2/7

Préliminaires

Soient $\rho \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ fixés. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^{\rho}\,|\Gamma_n(x)|$$

On considère la série de terme général $v_n = \ln(u_n) - \ln(u_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que : $v_n = \dfrac{\rho-(x+1)}{n} + \dfrac{\rho-(x+1)^2}{n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})$, lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Étudier, selon le réel ρ, la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$.

3. Déduire une condition nécessaire et suffisante, sur ρ, pour que la suite $(\ln(u_n))_{n\geqslant 0}$ soit convergente.

4. Montrer qu'il existe un réel strictement positif $K(x)$, tel que l'on ait :

$$\lim_{n\to+\infty} n^{x+1}|\Gamma_n(x)| = K(x)$$

Partie I

5. Soit f une application de $[\alpha, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, où $\alpha \leqslant 0$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le système :

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{n} x_k \Gamma_k(p) = f(p) \\ 0 \leqslant p \leqslant n \end{cases}$$

de $(n+1)$ équations à $(n+1)$ inconnues $x_o, \cdots, x_n$, admet une unique solution. (Ind : *remarquer qu'il s'agit d'un système linéaire triangulaire*).

(b) En déduire l'existence d'une unique suite de réels $(a_n)_{n\geqslant 0}$ possédant la propriété suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \Gamma_k(x)$ est nulle pour tout $x \in \{0, 1, \cdots, n\}$.

La suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ sera dite **suite associée à la fonction** f.

(c) Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que la suite de terme général $(b-1)^n$ est la suite associée à la fonction $x \mapsto b^x$.

6. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ la suite associée à f, selon la définition donnée en (5.b.). On suppose de plus que $\alpha = 0$ et f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, +\infty[$.

(a) Montrer que :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \exists \theta \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k \Gamma_k(x) + \Gamma_{N+1}(x)\, f^{(N+1)}(\theta)$$

(Ind : *étudier d'abord le cas* $x \in \{0, \cdots, N\}$. *Pour* $x \notin \{0, \cdots, N\}$, *utiliser la fonction auxiliaire* $t \mapsto f(t) - \sum_{k=0}^{N} a_k \Gamma_k(t) - A\,\Gamma_{N+1}(t)$, *où* A *est une constante convenablement choisie et appliquer le théorème de Rolle*).

(b) On suppose de plus que f vérifie la propriété suivante :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_o \in \mathbb{N} \text{ tels que } \forall y \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \geqslant n_o,\ |f^{(n)}(y)| \leqslant M\, n$$

Montrer que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \Gamma_n(x)$.

(c) Que peut-on dire de f si cette fonction est nulle pour tout entier naturel ?

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/4215 - Wadifa Info - page 3/7

Partie II

Pour $h \in \mathbb{R}$, on considère dans cette partie, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} h^n \Gamma_n(x)$, de variable réelle x.

7. Dans cette question, on suppose $|h| < 1$.

(a) Montrer que le domaine de convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} h^n \Gamma_n(x)$ est $\mathbb{R}$; on discutera le cas $x \in \mathbb{N}$ puis le cas où $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

i . Établir à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(1+h)^x = \sum_{k=0}^{n} \Gamma_k(x) h^k + (n+1)\Gamma_{n+1}(x) \int_0^h \left(\frac{h-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{x-1} dt$$

ii . Déduire que $(1+h)^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \Gamma_k(x)\, h^k$.

8. On prend $h = 1$.

(a) Montrer que si $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$, la série $\sum_{n\geqslant 0} \Gamma_n(x)$ est convergente.

(b) Déterminer, pour $x \in]-1, 0[$, la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} \Gamma_n(x)$. (Ind : *On pourra remarquer que* $\Gamma_n(x) = (-1)^n |\Gamma_n(x)|$).

(c) Montrer que si $x \in]-\infty, -1]$, la suite $(\Gamma_n(x))_{n\geqslant 0}$ ne tend pas vers 0.

(d) Déduire le domaine de convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} \Gamma_n(x)$.

(e) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \Gamma_n(x) = 2^x$.

Exercice 1

1. Montrer que l'intégrale impropre :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} \mathrm{d}t$$

est convergente. On notera J sa valeur.

2. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale :

$$J_n = \int_0^{+\infty} t e^{-nt} \mathrm{d}t$$

3. Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 1} J_n$ est convergente de somme égale à J .

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/4215 - Wadifa Info - page 4/7

On considère pour $n \geq 1$ la fonction P_n à valeurs complexes définie pour tout $x \in [0, +\infty[$ par :

$$P_n(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left((\sqrt{x}+\mathrm{i})^{2n+1} - (\sqrt{x}-\mathrm{i})^{2n+1}\right)$$

où, i désigne le nombre complexe vérifiant $\mathrm{i}^2 = -1$.

4 . Montrer que P_n est polynomiale.

5 . Déterminer ses racines dans $]0, +\infty[$.

6 . En déduire les relations pour $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}; \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{2n(n+1)}{3}$$

7 . Démontrer, pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, les inégalités : $\operatorname{cotan}(t) \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sin(t)}$.

8 . En déduire que $J = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 2

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. On rappelle les définitions suivantes :

Définitions :

a- Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et soit $l \in E$. On dit que l est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers l.

b- *Une partie K de E est dite **compacte** si, toute suite (x_n) d'éléments de K, admet une valeur d'adhérence appartenant à K.*

1 . Théorème des compacts emboités

Soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties compactes non vides et emboitées, c'est à dire vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_{n+1} \subset C_n$$

(a) Justifier l'existence d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $x_n \in C_n$.

(b) Justifier que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence x.

(c) Déduire que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ est un compact non vide. (Ind : *on montrera que* $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$)

2 . Théorème de Dini

Soit K un compact non vide de E. On considère une suite croissante (f_n) de fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction continue f ; c'est à dire :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in K,\ \ f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \\ \forall x \in K,\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \end{cases}$$

On fixe arbitrairement un réel $\varepsilon > 0$. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$K_n = \{x \in K;\ \ \left|f_n(x) - f(x)\right| \geq \varepsilon\}$$

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/4215 - Wadifa Info - page 5/7

(a) Justifier que, K_n est un compact, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) En utilisant le théorème des compacts emboîtés, montrer l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $K_{n_0} = \emptyset$.

(c) En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur K vers f.

3 . Application : Approximation polynômiale de la racine carrée

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par :

$$\begin{cases} P_0 = 0 \\ P_{n+1}(t) = P_n(t) + \dfrac{t - P_n^2(t)}{2} \end{cases}$$

(a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est une fonction polynômiale et que :

$$\forall t \in [0,1] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq P_n(t) \leq \sqrt{t}$$

(b) Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(t) = \sqrt{t}$.

(c) En utilisant le théorème de Dini, établir la convergence uniforme de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, p)$ à valeur dans $X(\Omega) = \{1, 2, ..., n\}$.

On appelle *entropie* de X, le réel $H(X)$ défini par

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(p_i) \text{ avec } p_i = p[X = i] > 0$$

1 . Soient B_p la variable de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

(a) Rappeler l'expression de la variance $V(B_p)$ et calculer son entropie $H(B_p)$ en fonction de p.

(b) Montrer que

$$\forall p \in]0,1[: V(B_p) \leq H(B_p)$$

2 . Soient n un entier naturel non nul et U_n une variable alétoire uniforme sur $\{1, 2, ..., n\}$, c'est à dire

$$\forall k \in \{1, 2, ..., n\} : p[U_n = k] = \frac{1}{n}$$

(a) Rappeler l'expression de la variance $V(U_n)$ et calculer son entropie $H(U_n)$ en fonction de n puis écrire $H(U_n)$ en fonction de $V(U_n)$.

(b) Montrer que

$$\forall u > 0 : u \ln(u) \geq u - 1 \qquad (\mathscr{I})$$

avec égalité , si et seulement si $u = 1$.

(c) En déduire que, pour toute variable aléatoire discrète X à valeur dans $\{1, 2, ..., n\}$,

$$H(X) \leq H(U_n)$$

avec égalité si, et seulement si, $X = U_n$.

On a ainsi montré que parmi toutes les variables aléatoires discrètes sur un ensemble de cardinal n, la loi uniforme U_n réalise le maximum d'entropie.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/4215 - Wadifa Info - page 6/7

Wadifa Info

www.wadifa-info.com

Le sujet suivant à préparer — النموذج التالي للتحضير

نموذج مباراة ولوج مسلك تكوين أطر الإدارة التربوية - اختبار في علوم التربية - دورة 2025

Modèle : Concours d'accès à la filière de formation des cadres de l'administration pédagogique - épreuve de sciences de

www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/1329

Chaîne WhatsApp — قناة واتساب

المباريات الجديدة والنتائج كل يوم

Nouveaux concours et résultats chaque jour

wadifa-info.com/wa

Chaîne YouTube — قناة يوتيوب

امتحانات تجريبية بالتصحيح، بالدارجة

Examens blancs corrigés, expliqués en darija

youtube.com/@wadifainfo

Envoyer à un ami — أرسل النموذج لصديق

شارك هذا النموذج على واتساب مع من يحضّر معك

Partagez ce sujet sur WhatsApp

wa.me