

الجمهورية الجزائرية
الديمقراطية والاشتراكية
وزارة التربية والتعليم
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي



السلطة الوطنية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

المركز الجهوي لمهن التربية والتكوين - جهة فاس مكناس

CYCLE DE PRÉPARATION À L'AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES

CONCOURS D'ENTRÉE EN PREMIÈRE ANNÉE

Épreuve d'analyse & probabilités

Durée : 4 H

Section : Mathématiques

Édition Juillet 2019

*Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde.
La présentation, la lisibilité, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Aucun document n'est autorisé. L'usage de toute machine (calculatrice, téléphone mobile, etc.) est strictement interdit.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

Exercice 1.

On note $\Omega = \mathbb{N}^*$, que l'on munit de la tribu $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et de la mesure de comptage G . Pour $s > 1$, on pose

$$\xi(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}.$$

1. Montrer que $\lim_{s \rightarrow 1^+} \xi(s) = +\infty$.
2. Soit $s > 1$. On note μ_s la mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \mu_s(\{i\}) = \frac{1}{\xi(s)} \frac{1}{i^s}.$$

Vérifier que μ_s est une probabilité.

3. Soit p un entier naturel non nul. Montrer que $\mu_s(p\mathbb{N}^*) = \frac{1}{p^s}$.
4. On note $(p_k)_{k \geq 1}$ la suite des nombres premiers. On pose $A_k = p_k \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k^c = \{1\}.$$

En déduire que soigneusement que

$$\frac{1}{\xi(s)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_s\left(\bigcap_{k=1}^n A_k^c\right).$$

5. Montrer que les événements $(A_k)_{k \geq 1}$ sont indépendants sous μ_s .
6. Donner une preuve probabiliste de l'identité

$$\forall s > 1 \quad \log \xi(s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n -\log\left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right).$$

7. Montrer que les séries de termes généraux respectivement $(-\log(1 - \frac{1}{p_k^s}))_{k \geq 1}$ et $(\frac{1}{p_k})_{k \geq 1}$ sont divergentes.

Exercice 2.

Soit k un nombre réel strictement positif, on considère la famille $(K_a)_{a \in \mathbb{R}_+^*}$ de fonctions de la variable réelle où chacune des fonctions K_a est définie par

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* : \quad K_a(x) = x^a \exp(-kx).$$

1. Étudier les variations de K_a . Construire le graphe $\mathcal{G}_a$ de K_a pour $a = \frac{1}{2}$; $a = 1$ et $a = 2$.
2. Préciser les coordonnées du point de $\mathcal{G}_a$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses et déterminer l'ensemble de ces points lorsque a décrit $\mathbb{R}_+^*$.
3. Quelle est la fonction limite simple de la famille $(K_a)_{a \in \mathbb{R}_+^*}$ lorsque a tend vers 0. La convergence de $(K_a)_{a \in \mathbb{R}_+^*}$ vers cette fonction est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$?
4. Montrer que l'aire A_a comprise entre le graphe $\mathcal{G}_a$ et l'axe des abscisses est finie. Calculer A_a pour $a \in \mathbb{N}$.

Problème

Soit $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes indéfiniment dérivables et $\mathcal{S}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ le sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ constitué des fonctions f de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que

$$\forall p, q \in \mathbb{N} : \lim_{|x| \rightarrow +\infty} x^p f^{(q)}(x) = 0.$$

Soit $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{H}$ les applications de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ définies par

$$(\mathcal{U}f)(x) = xf(x) + f'(x)$$

$$(\mathcal{V}f)(x) = xf(x) - f'(x)$$

$$(\mathcal{H}f)(x) = x^2 f(x) - f''(x).$$

Partie 1.

1. Vérifier que $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ et $\mathcal{H}$ sont bien des endomorphismes de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
2. On munit $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de la somme et le produit usuelles des fonctions.
 - (a) Montrer que $\mathcal{S}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est une sous algèbre de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ non réduite à $\{0\}$.
 - (b) Exprimer l'application composée $\mathcal{V} \circ \mathcal{U}$ en fonction de $\mathcal{H}$ et l'application identité $\text{id}_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})}$.
3. Soit $f \in \mathcal{S}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Montrer que $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \exists M_{p,q} \in \mathbb{R}^+$ dépendant de f tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} : |x^p f^{(q)}(x)| \leq M_{p,q} (1+x^2)^{-1}$$

4. Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{S}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

- (a) Prouver que $x \mapsto f^2(x)$ et $x \mapsto f(x)g(x)$ ont des intégrales absolument convergentes sur toute la droite $\mathbb{R}$.
- (b) Dédire que l'application de $\mathcal{S}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \times \mathcal{S}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$ définie par $(f, g) \mapsto (f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)} dx$ fait de $\mathcal{S}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ un espace préhilbertien complexe. Soit $\|f\|$ la norme d'un élément f dans cet espace.

- (c) Expliciter l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En déduire une relation entre les réels suivants

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)} dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 dx.$$

5. Démontrer que $\forall (f, g) \in \mathcal{S}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})^2$,

$$\langle \mathcal{U}f, g \rangle = \langle f, \mathcal{V}g \rangle$$

$$\langle \mathcal{V}f, g \rangle = \langle f, \mathcal{U}g \rangle$$

$$\langle \mathcal{H}f, g \rangle = \langle f, \mathcal{H}g \rangle$$

Partie 2.

1. Soit $t \in \mathbb{R}$ et u_t la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u_t(x) = a(t) \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right) \quad \text{où} \quad a(t) \in \mathbb{R}^+.$$

- (a) Prouver que $u_t \in \mathcal{S}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et déterminer $a(t)$ pour que $\|u_t\| = \exp\left(\frac{t^2}{4}\right)$. (On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}$).

(b) Exprimer $(\mathcal{L}u_t)(x)$ et $(\mathcal{V}u_t)(x)$ en fonction de t , x et $u_t(x)$.

Dans la suite, on suppose que $\|u_t\| = \exp(\frac{t^2}{4})$.

2. Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

(a) Montrer que la fonction $x \mapsto f(x) \exp(tx - \frac{x^2}{2})$ a une intégrale absolument convergente sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit $\mathcal{L}f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $(\mathcal{L}f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_t(x) f(x) dx$. Calculer $(\mathcal{L}u_0)(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

(c) Montrer que $(\mathcal{L}f)(t) = \langle u_t, f \rangle$ et $(\mathcal{L} \circ \mathcal{V}f)(t) = t(\mathcal{L}f)(t)$.

(d) Montrer que la fonction $t \mapsto (\mathcal{L}f)(t) \exp(-\frac{t^2}{4})$ est bornée.

3. Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et on considère les fonctions F , G et F_n définies sur $\mathbb{R}$ par

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(tx - \frac{x^2}{2}) dx \quad G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \exp(tx - \frac{x^2}{2}) dx$$

$$\text{et } F_n(t) = \int_{-n}^n f(x) \exp(tx - \frac{x^2}{2}) dx, \quad \text{où } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Prouver que F_n est continuellement dérivable et calculer sa dérivée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Montrer que, $\forall A > 0$, la suite de fonctions $(F'_n)_n$ converge uniformément vers G sur $[-A, A]$.

(c) Montrer que, $\forall A > 0$, la suite de fonctions $(F_n)_n$ converge uniformément vers F sur $[-A, A]$.

(d) Montrer que F est dérivable et calculer sa dérivée.

4. En déduire que $\forall f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ on a $(\mathcal{L}f)' = \frac{1}{2}(\mathcal{L} \circ \mathcal{L}f)$.

5. Démontrer que $\mathcal{L}$ est linéaire de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

6. Exprimer $\mathcal{L} \circ \mathcal{H}(f)$ en fonction de $\mathcal{L}f$ et $(\mathcal{L}f)'$.

Partie 3.

Soit h_0 la fonction définie par $h_0(x) = \exp(-\frac{x^2}{2})$ pour $x \in \mathbb{R}$ et on pose $h_n = \mathcal{V}^n h_0$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{V}^n = \mathcal{V} \circ \mathcal{V} \circ \dots \circ \mathcal{V}$, n fois.

1. Calculer $\mathcal{L}h_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Montrer que $\mathcal{L}f = 0$ implique $\mathcal{L}g^n = 0$ où $g^n(x) = x^n f(x)$ et $n \in \mathbb{N}$.

3. Déterminer suivant les valeurs du réel λ les solutions de l'équation différentielle

$$2ty'(t) + y(t) = \lambda y(t)$$

dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

4. En déduire que les seules valeurs propres de l'endomorphisme $\mathcal{H}$ appartiennent à

$$E = \{f : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = P(x)h_0(x) \text{ où } P \in \mathbb{R}[X]\}$$

sont les fonctions h_n (à un facteur près) associées aux valeurs propres $2n+1$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$

$$x(t - \frac{x}{t})$$

FIN DU SUJET