

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي

المركز الجهوي لمهن التربية والتكوين - جهة فاس مكناس -

CYCLE DE PRÉPARATION À L'AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES

CONCOURS D'ENTRÉE EN PREMIÈRE ANNÉE

Épreuve d'analyse & probabilités

Durée : 4 H

Section : Mathématiques

Édition Juillet 2019

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde.
La présentation, la lisibilité, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Aucun document n'est autorisé. L'usage de toute machine (calculatrice, téléphone mobile, etc.) est strictement interdit.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/4094 - Wadifa Info - page 1/5

Exércice 1.

On note $\Omega = \mathbb{N}^*$, que l'on munit de la tribu $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et de la mesure de comptage C. Pour $s > 1$, on pose

$$\xi(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}.$$

1. Montrer que $\lim_{s \longrightarrow 1^+} \xi(s) = +\infty$.

2. Soit $s > 1$. On note μ_s la mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \mu_s(\{i\}) = \frac{1}{\xi(s)} \frac{1}{i^s}.$$

Vérifier que μ_s est une probabilité.

3. Soit p un entier naturel non nul. Montrer que $\mu_s(p\mathbb{N}^*) = \frac{1}{p^s}$.

4. On note $(p_k)_{k \geq 1}$ la suite des nombres premiers. On pose $A_k = p_k\mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k^c = \{1\}.$$

En déduire que soigneusement que

$$\frac{1}{\xi(s)} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mu_s\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k^c\right).$$

5. Montrer que les événement $(A_k)_{k \geq 1}$ sont indépendants sous μ_s.

6. Donner une preuve probabiliste de l'identité

$$\forall s > 1 \quad \log \xi(s) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n} -\log\left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right).$$

7. Montrer que les séries de termes généraux respectivement $\left(-\log\left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)\right)_{k \geq 1}$ et $\left(\frac{1}{p_k}\right)_{k \geq 1}$ sont divergentes.

Exércice 2.

Soit k un nombre réel strictement positif, on considère la famille $(K_a)_{a \in \mathbb{R}_+^*}$ de fonctions de la variable réelle où chacune des fonctions K_a est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \quad K_a(x) = x^a \exp(-kx).$$

1. Etudier les variations de K_a. Construire le graphe $\mathcal{G}_a$ de K_a pour $a = \frac{1}{2}$; $a = 1$ et $a = 2$.
2. Préciser les coordonnées du point de $\mathcal{G}_a$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses et déterminer l'ensemble de ces points lorsque a décrit $\mathbb{R}_+^*$.
3. Quelle est la fonction limite simple de la famille $(K_a)_{a \in \mathbb{R}_+^*}$ lorsque a tend vers 0. La convergence de $(K_a)_{a \in \mathbb{R}_+^*}$ vers cette fonction est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$?
4. Montrer que l'aire A_a comprise entre le graphe $\mathcal{G}_a$ et l'axe des abscisses est fini. Calculer A_a pour $a \in \mathbb{N}$.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/4094 - Wadifa Info - page 2/5

Problème

Soit $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{C})$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbf{R}$ à valeurs complexes indéfiniment dérivable et $\mathcal{S}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{C})$ le sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{C})$ constitué des fonctions f de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que

$$\forall p,q \in \mathbf{N} : \quad \lim_{|x|\longrightarrow+\infty} x^p f^{(q)}(x) = 0.$$

Soit $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{H}$ les applications de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{C})$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{C})$ définies par

$$(\mathcal{U}f)(x) = xf(x) + f'(x)$$
$$(\mathcal{V}f)(x) = xf(x) - f'(x)$$
$$(\mathcal{H}f)(x) = x^2 f(x) - f''(x).$$

Partie 1.

1. Vérifier que $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ et $\mathcal{H}$ sont bien des endomorphismes de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{C})$.
2. On munit $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{C})$ de la somme et le produit usuelles des fonctions.
   - (a) Montrer que $\mathcal{S}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{C})$ est une sous algèbre de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{C})$ non réduite à $\{0\}$.
   - (b) Exprimer l'application composée $\mathcal{V}\circ\mathcal{U}$ en fonction de $\mathcal{H}$ et l'application identité $id_{\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{C})}$.
3. Soit $f \in \mathcal{S}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{C})$. Montrer que $\forall (p,q) \in \mathbf{N}^2$, $\exists M_{p,q} \in \mathbf{R}^+$ dépendant de f tel que

$$\forall x \in \mathbf{R} : \quad \left|x^p f^{(q)}(x)\right| \leq M_{p,q}(1+x^2)^{-1}$$

4. Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{S}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{C})$.
   - (a) Prouver que $x \longmapsto f^2(x)$ et $x \longmapsto f(x)g(x)$ ont des intégrales absolument convergentes sur toute la droite $\mathbf{R}$.
   - (b) Déduire que l'application de $\mathcal{S}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{C}) \times \mathcal{S}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{C})$ dans $\mathbf{C}$ définie par $(f,g) \longmapsto \langle f,g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$ fait de $\mathcal{S}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{C})$ un espace préhilbertien complexe.
     Soit $\|f\|$ la norme d'un élément f dans cet espace.
   - (c) Expliciter l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En déduire une relation entre les réels suivants

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 dx.$$

5. Démontrer que $\forall (f,g) \in \mathcal{S}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{C})^2$,

$$\langle \mathcal{U}f, g\rangle = \langle f, \mathcal{V}g\rangle$$
$$\langle \mathcal{V}f, g\rangle = \langle f, \mathcal{U}g\rangle$$
$$\langle \mathcal{H}f, g\rangle = \langle f, \mathcal{H}g\rangle$$

Partie 2.

1. Soit $t \in \mathbf{R}$ et u_t la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$u_t(x) = a(t)\exp(tx - \frac{x^2}{2}) \quad \text{où} \quad a(t) \in \mathbf{R}^+.$$

   (a) Prouver que $u_t \in \mathcal{S}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{C})$ et déterminer $a(t)$ pour que $\|u_t\| = \exp(\frac{t^2}{4})$. (On rappel que $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}$).

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/4094 - Wadifa Info - page 3/5

(b) Exprimer $(\mathcal{U}u_t)(x)$ et $(\mathcal{V}u_t)(x)$ en fonction de t, x et $u_t(x)$.

Dans la suite, on suppose que $\|u_t\| = \exp(\frac{t^2}{4})$.

2. Soit $f \in \mathcal{S}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{C})$.

(a) Montrer que la fonction $x \longmapsto f(x)\exp(tx - \frac{x^2}{2})$ a une intégrale absolument convergente sur $\mathbf{R}$.

(b) Soit $\mathcal{L}f$ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $(\mathcal{L}f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_t(x)f(x)dx$. Calculer $(\mathcal{L}u_0)(x)$ pour $x \in \mathbf{R}$.

(c) Montrer que $(\mathcal{L}f)(t) = \langle u_t, f\rangle$ et $(\mathcal{L}\circ\mathcal{V}f)(t) = t(\mathcal{L}f)(t)$.

(d) Montrer que la fonction $t \longmapsto (\mathcal{L}f)(t)\exp(-\frac{t^2}{4})$ est bornée.

3. Soit $f \in \mathcal{S}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{C})$ et on considère les fonctions F, G et F_n définies sur $\mathbf{R}$ par

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(tx - \frac{x^2}{2})dx \qquad G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\exp(tx - \frac{x^2}{2})dx$$

$$\text{et} \qquad F_n(t) = \int_{-n}^{n} f(x)\exp(tx - \frac{x^2}{2})dx, \quad \text{où } n \in \mathbf{N}.$$

(a) Prouver que F_n est continuement dérivable et calculer sa dérivée pour tout $n \in \mathbf{N}$.

(b) Montrer que, $\forall A > 0$, la suite de fonctions $(F_n')_n$ converge uniformement vers G sur $[-A, A]$.

(c) Montrer que, $\forall A > 0$, la suite de fonctions $(F_n)_n$ converge uniformement vers F sur $[-A, A]$.

(d) Montrer que F est dérivable et calculer sa dérivée..

4. En déduire que $\forall f \in \mathcal{S}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{C})$ on a $(\mathcal{L}f)' = \frac{1}{2}(\mathcal{L}\circ\mathcal{U})f$.

5. Démontrer que $\mathcal{L}$ est linéaire de $\mathcal{S}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{C})$ dans $C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{C})$.

6. Exprimer $\mathcal{L}\circ\mathcal{H}(f)$ en fonction de $\mathcal{L}f$ et $(\mathcal{L}f)'$.

Partie 3.

Soit h_0 la fonction définie par $h_0(x) = \exp(-\frac{x^2}{2})$ pour $x \in \mathbf{R}$ et on pose $h_n = \mathcal{V}^n h_0$ où $n \in \mathbf{N}^*$ et $\mathcal{V}^n = \mathcal{V}\circ\mathcal{V}\circ\ldots\circ\mathcal{V}$, n fois.

1. Calculer $\mathcal{L}h_n$ pour $n \in \mathbf{N}$.
2. Soit $f \in \mathcal{S}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{C})$. Montrer que $\mathcal{L}f = 0$ implique $\mathcal{L}g^n = 0$ où $g^n(x) = x^n f(x)$ et $n \in \mathbf{N}$.
3. Déterminer suivant les valeurs du réel λ les solutions de l'équation différentielle

$$2ty'(t) + y(t) = \lambda y(t)$$

dans $C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{C})$.

4. En déduire que les seules valeurs propres de l'endomorphisme $\mathcal{H}$ appartiennent à

$$E = \{f : \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = P(x)h_0(x) \quad \text{où} \quad P \in \mathbf{R}[X]\}$$

sont les fonctions h_n (à un facteur prés) associées aux valeurs propres $2n+1$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$

FIN DU SUJET

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/4094 - Wadifa Info - page 4/5

Wadifa Info

www.wadifa-info.com

Le sujet suivant à préparer — النموذج التالي للتحضير

نموذج مباراة ولوج مسلك تكوين أطر الإدارة التربوية - اختبار في علوم التربية - دورة 2025

Modèle : Concours d'accès à la filière de formation des cadres de l'administration pédagogique - épreuve de sciences de

www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/1329

Chaîne WhatsApp — قناة واتساب

المباريات الجديدة والنتائج كل يوم

Nouveaux concours et résultats chaque jour

wadifa-info.com/wa

Chaîne YouTube — قناة يوتيوب

امتحانات تجريبية بالتصحيح، بالدارجة

Examens blancs corrigés, expliqués en darija

youtube.com/@wadifainfo

Envoyer à un ami — أرسل النموذج لصديق

شارك هذا النموذج على واتساب مع من يحضّر معك

Partagez ce sujet sur WhatsApp

wa.me