المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

المركز الجهوي لمهن التربية والتكوين

جهة الرباط- سلا- زمور- زعير

Concours d'accès au cycle de préparation à l'agrégation de Mathématiques

Session Juillet 2016

ÉPREUVE D'ANALYSE ET PROBABILITÉ

Durée 4 heures

Le sujet comporte 5 pages, en plus de cette page de garde.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/4092 - Wadifa Info - page 1/7

Important

L'épreuve est constituée de deux exercices et un problème. Le candidat est invité à bien mentionner les références complètes de chaque question traitée.

Les candidats sont tenus à rendre deux copies séparées même si elles sont vierges. La première contenant la résolution des deux exercices et la seconde contenant celle du problème. Dans chacune des deux copies on indiquera les références du candidat et le nombre d'intercalaires utilisés.

Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la rigueur de votre raisonnement, de la clarté de la rédaction et du soin apporté à la présentation de votre copie. Le candidat peut utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, il veillera toutefois à mentionner la référence du résultat utilisé.

Si le candidat repère ce qu'il pense être une erreur de l'énoncé, il le signale sur sa copie en expliquant les raisons qui l'ont amené à le penser. Ceci ne doit pas l'empêcher de finir son épreuve et il a le choix d'adopter les rectifications qu'il croit nécessaires ou pas.

Les calculatrices et tout matériel électronique ainsi que les documents sont interdits lors de cette épreuve.

✧ ✧ ✧ ✧

Exercice 1

Soient $\mathscr{E} = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions numériques continues sur $[0,1]$ et $\mathscr{B}$ l'espace vectoriel réel des fonctions numériques bornées sur $[0,1]$, muni de la convergence uniforme définie pour tout $f \in \mathscr{B}$, par :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

On désigne par $\mathscr{L}$ l'espace vectoriel réel des fonctions $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$k(g) := \sup_{x,y\in[0,1],x\neq y} \left|\frac{g(x)-g(y)}{x-y}\right|$$

existe et est finie.

1. Montrer que si une fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, alors $g \in \mathscr{L}$ et, que

$$k(g) = \sup_{x\in[0,1]} |g'(x)|.$$

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/4092 - Wadifa Info - page 2/7

2. Montrer que $\mathscr{E} \not\subset \mathscr{L}$, puis que $\mathscr{L} \subset \mathscr{B}$.

3. On pose pour tout $g \in \mathscr{L}$, $N(g) = k(g) + \|g\|_\infty$. Montrer que N est une norme sur $\mathscr{L}$.

On note $\mathscr{L}_N$ l'espace $\mathscr{L}$ muni de la norme N et $\mathscr{L}_{\|\ \|}$ l'espace $\mathscr{L}$ muni de la norme $\|\ \|_\infty$.

4. Montrer que l'application identité est continue de $\mathscr{L}_N$ dans $\mathscr{L}_{\|\ \|}$.

5. Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{n} & \text{si} \quad \dfrac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $f_n \in \mathscr{L}$ et calculer $N(f_n)$.

(b) Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas dans $\mathscr{L}_N$.

(c) L'application identité est elle continue de $\mathscr{L}_{\|\ \|}$ dans $\mathscr{L}_N$?

(d) Les normes N et $\|.\|_\infty$ sont elle équivalentes ?

6. Soit $(h_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies par :

$$\forall x \in [0,1],\ h_n(x) = \sqrt{x + \frac{1}{n}}$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n \in \mathscr{L}$.

(b) Montrer que la suite $(h_n)_{n\geq 1}$ converge vers la fonction $h : x \mapsto \sqrt{x}$ dans $\mathscr{L}_{\|\ \|}$.

(c) En déduire que $\mathscr{L}$ n'est pas fermé dans $\mathscr{B}$. Conclure.

Exercice 2

On munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|\ \|_\infty$, soit $\|X\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|$, pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On définit les normes N, N_2 et N_∞ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$N_\infty(A) = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|, \quad N_2(A) = \sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|, \text{ et } \quad N(A) = \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|,$$

pour toute matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $\mathscr{R}_n$, l'ensemble des racines carrés de I_n :

$$\mathscr{R}_n = \{R \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid R^2 = I_n\},$$

I_n désigne la matrice identité.

7. Montrer que $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \forall z \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) : \|Az\|_\infty \leq N_\infty(A)\,\|z\|_\infty$.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/4092 - Wadifa Info - page 3/7

8. Montrer l'égalité

$$N_\infty(A) = \max_{z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), z \neq 0} \frac{\|Az\|_\infty}{\|z\|_\infty}.$$

9. En déduire que N_∞ est une norme matricielle c'est-à-dire qu'elle vérifie :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), N_\infty(AB) \leq N_\infty(A) N_\infty(B).$$

10. Montrer que N_2 est une norme matricielle.

11. N est-elle une norme matricielle ? justifier.

12. Soit $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. On pose $N_Q(A) = N_\infty(Q^{-1}AQ)$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Vérifier que N_Q est une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Montrer qu'il existe une constante C_Q telle que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\frac{1}{C_Q} N_\infty(A) \leq N_Q(A) \leq C_Q N_\infty(A).$$

13. Soit $p \in \mathbb{N}$, on pose $S_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer S_p^2.

(b) $\mathcal{R}_2$ est -elle une partie bornée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

(c) $\mathcal{R}_n$ est -elle bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour $n \geq 3$?

(d) Pour cette question, $n \geq 2$. Montrer qu'il n'existe pas de norme $\|\ \|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, vérifiant pour toutes matrices A et B inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| \geq \|A\| \|B\|$.

La suite de l'épreuve est à rédiger séparément !

Problème

Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt} dt$$

14. Montrer que f est définie et continue sur $[0, +\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

15. Déterminer les limites de f et f' en $+\infty$.

16. Exprimer f'' sur $]0, +\infty[$ à l'aide de fonctions usuelles et en déduire que

$$\forall x > 0,\ f'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1)$$

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/4092 - Wadifa Info - page 4/7

17. Montrer que $f(0) = \dfrac{\pi}{2}$ et $\forall x > 0$,

$$f(x) = x\ln(x) - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \arctan(x) + \frac{\pi}{2}$$

18. Montrer que $\forall s \in \mathbb{R}$,

$$|s| = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \int_0^{\infty} \frac{1-(\cos t)^n}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

19. Justifier l'existence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et préciser la monotonie de la sous-suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

20. Montrer que $u_1 = u_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

Dans la suite on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\{1,-1\}$ et telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

L'espérance d'une variable aléatoire réelle finie Z est notée $\mathbb{E}(Z)$ et sa variance $\mathbb{V}(Z)$.

21. Déterminer la loi de S_n ainsi son espérance et sa variance.

22. Montrer que $|S_{2n+2}| - |S_{2n+1}|$ suit la même loi que les X_k.

23. Soit S et T deux variables aléatoires réelles finies indépendantes définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On suppose que T et $-T$ ont même loi. Montrer que $\mathbb{E}(\cos(S+T)) = \mathbb{E}(\cos(S))\mathbb{E}(\cos(T))$.

24. On considère la fonction φ_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\varphi_n(t) = \mathbb{E}(\cos(S_n t))$ pour tout réel t. Montrer que $\varphi_n(t) = (\cos t)^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel t.

25. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(|S_n|) = \dfrac{2}{\pi}u_n$. (ind. on utilisera l'expression intégrale de la valeur absolue obtenue à la question **18**). En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} = u_{2n+2}$.

On se propose de démontrer que la suite $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0, c'est-à-dire qu'il existe un événement négligeable $\mathcal{Z} \in \mathscr{A}$ tel que

$$\forall \omega \in \Omega \setminus \mathcal{Z},\ \frac{S_n(\omega)}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$U_n = \left(\frac{S_n}{n}\right)^4 \text{ et } \mathcal{Z}_n = \left\{\omega \in \Omega \mid \exists k \geq n : U_k(\omega) \geq \frac{1}{\sqrt{k}}\right\}$$

26. Montrer que $\mathbb{E}(S_n^4) = 3n^2 - 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/4092 - Wadifa Info - page 5/7

27. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\left(U_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{3}{n^{3/2}}$.

28. Montrer que $\mathcal{Z}_n \in \mathscr{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\mathcal{Z}_n) = 0$.

29. En considérant $\mathcal{Z} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{Z}_n$, montrer que $\left(\frac{S_n}{n}\right)$ converge presque sûrement vers 0.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/4092 - Wadifa Info - page 6/7

Wadifa Info

www.wadifa-info.com

Le sujet suivant à préparer — النموذج التالي للتحضير

نموذج مباراة ولوج مسلك تكوين أطر الإدارة التربوية - اختبار في علوم التربية - دورة 2025

Modèle : Concours d'accès à la filière de formation des cadres de l'administration pédagogique - épreuve de sciences de

www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/1329

Chaîne WhatsApp — قناة واتساب

المباريات الجديدة والنتائج كل يوم

Nouveaux concours et résultats chaque jour

wadifa-info.com/wa

Chaîne YouTube — قناة يوتيوب

امتحانات تجريبية بالتصحيح، بالدارجة

Examens blancs corrigés, expliqués en darija

youtube.com/@wadifainfo

Envoyer à un ami — أرسل النموذج لصديق

شارك هذا النموذج على واتساب مع من يحضّر معك

Partagez ce sujet sur WhatsApp

wa.me