

Examen Master Mathématiques et Applications aux Calculs Scientifiques
Epreuve d'Analyse

Exercice 1: Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{2} + \frac{x^3}{3} - 4x + y^2$$

Soit l'équation $f(x, y) = 7$. Montrer qu'elle définit implicitement au voisinage de $(3, 2)$ une fonction $y = \varphi(x)$ et calculer l'équation de la droite tangente $y = \varphi(x)$ en $x = 3$.

Exercice 2 (lemme de Gronwall) : Supposons qu'une fonction x de classe $C^1(I, \mathbb{R})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, vérifie:

$$x'(t) \leq a(t)x(t) + b(t)$$

où a et b sont des fonctions continues sur I dans $\mathbb{R}$ et $x(t_0) = x_0$ pour tout $t_0 \in I$.

Posons $\varphi(t, t_0) = \int_{t_0}^t a(s)ds$. Montrer que

$$x(t) \leq x(t_0)\exp(\varphi(t, t_0)) + \int_{t_0}^t (\varphi(t, s))b(s)a(s)ds$$

Exercice 3: Soit x un réel quelconque, soit $g_x : \theta \rightarrow g_x(\theta)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation

$$g_x(\theta) = e^{x \cos \theta}$$

1- Démontrer qu'il existe une unique suite $(U_n)_{n \geq 0}$ d'applications réelles définies sur $\mathbb{R}$, $x \rightarrow U_n(x)$ telle que la relation ci dessous ait lieu :

$$g_x(\theta) = U_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) \cos(n\theta)$$

2 Préciser la nature de la convergence de la série.

3- Comparer le réel $U_n(x)$ à la valeur de l'intégrale $\int_0^\pi e^{x \cos t} \cos(nt) dt$.

4- Démontrer que $(U_n(x))_{n \geq 1}^2$ est convergente (préciser la nature de la convergence).

5- Calculer $V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (U_n(x))^2$.

6- Pour quelles valeurs de l'entier n , U_n est elle paire ou impaire?

7- Montrer que pour tout n , $U_n \in C^\infty(\mathbb{R})$.

8- Comparer U'_0 et U'_n , $n \geq 1$ respectivement aux fonctions U_1 et $U_{n+1} + U_{n-1}$.

9- On pose $U_{-n} = U_n$, montrer que $U_n(x+y) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} U_p(x)U_{n-p}(x)$. (facultatif)



13/07/2018

**Concours d'entrée à la filière master MACS
Pour l'année universitaire 2018/2019**

Exercice 1. (5pts = 3pts + 2 pts)

On considère le (PL) suivant :

$$(P) \begin{cases} \text{Min } z = -50x - 30y \\ 10x + 6y \leq 45 \\ 4x + 6y \leq 36 \\ 2x + 6y \leq 27 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- 1) En utilisant la méthode tabulaire du simplexe, montrer que le problème (P) admet deux solutions optimales ;
- 2) Donner trois solutions distinctes de (P).

Exercice 2. (5pts = 3pts + 2 pts) Appliquer la méthode des deux phases du simplexe pour résoudre le problème suivant :

$$(P) \begin{cases} \text{Max } z = 6x_1 + 3x_2 + 4x_4 \\ \text{sujet à} \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 30 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 \leq 20 \\ x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Concours : Master Mathématiques et Applications au Calcul Scientifique.
Epreuve : Topologie et intégration
Durée : 1 heure

2017-2018.

A) Exercice de topologie

Soit (E, d) un espace métrique et soient A et B deux parties non vides fermées de E vérifiant $d(A, B) \neq 0$.

Pour tout u dans E on pose : $f(u) = \frac{d(u, A)}{d(u, A) + d(u, B)}$

- Démontrer que f est une fonction de E dans $\mathbb{R}$ telle que : $f|_A = 0$, $f|_B = 1$ et pour tout u dans E , $0 \leq f(u) \leq 1$.
- Démontrer qu'on a $\forall u, v \in E : |f(u) - f(v)| \leq \frac{d(u, v)}{d(A, B)}$

B) Exercice d'intégration

On note $M(X, B)$ l'ensemble des applications numériques sur X B -mesurables. Soit $M(X, B, \mu)$ un espace mesuré et $f \in M(X, B)$

- Montrer que, si f est positive, pour tout $t > 0$, on a

$$\mu\{f \geq t\} \leq \frac{1}{t} \int_{\{f \geq t\}} f d\mu \leq \frac{1}{t} \int f d\mu.$$

- Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite décroissante d'éléments de B telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = 0$.

Montrer que si f est intégrable alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{A_n} f d\mu = 0$ et en particulier $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\{|f| \geq n\}} f d\mu = 0$

- On suppose que f est positive et intégrable. Montrer que

$$i) \quad a\mu(\{f > a\}) \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 0$$

$$ii) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \forall A \in B \quad \mu(A) < \delta \rightarrow \int_A f d\mu < \varepsilon.$$