



Exercice 1 On se propose d'obtenir le développement en série entière de la fonction tangente. Pour $z \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, on pose $f(z) = \tan z$

1. En remarquant que $f' = 1 + f^2$, montrer qu'il existe une suite $(P_n)_n$ de polynômes à coefficients dans $\mathbb{N}$ telle que $f^{(n)} = P_n \circ f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que la série de MacLaurin de f a un rayon de convergence R supérieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$.
3. On note a_n les coefficients du développement précédent et g la somme de la série entière $\sum a_n x^n$.
Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$(n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$$

En déduire que, pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, $f(x) = g(x)$, et que $R = \frac{\pi}{2}$.

4. Calculer $a_0, a_1, \dots, a_7$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1

1. On définit pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fixé, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto g(t) = f(tx, ty)$.
Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée.
2. On suppose désormais que $f(tx, ty) = tf(x, y)$ pour tous $x, y, t \in \mathbb{R}$.

- i) Montrer que pour tous $x, y, t \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty)x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)y$$

- ii) En déduire qu'il existe des réels α et β que l'on déterminera tels que, pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$f(x, y) = \alpha x + \beta y$$

Epreuve d'Algèbre (1b)*

Exercice 1 Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

où $a, b, c \in \mathbb{C}$ sont trois racines 3^{ème} de l'unité, deux à deux distinctes et $x, y, z \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Montrer que $A^3 = I_3$.

Exercice 2 Soit f une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$ et q sa forme quadratique associée définie pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$q(x) = x_1^2 - x_2^2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3.$$

1. Ecrire la matrice A de q relativement à la base canonique B_0 de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une réduction de Gauss de q . Déduire la signature de q .

Exercice 3 Soient A un anneau, J un idéal de A et $R := A \ltimes J$ l'ensemble des couples (a, e) muni de l'addition composante par composante et de la multiplication définie par :

$$(a, e)(b, f) = (ab, af + be).$$

On vérifie que R est un anneau, dit l'anneau extension triviale, ou simplement extension triviale, de A par J .

Soit $R := A \ltimes J$ l'extension triviale de A par un idéal J .

1. Montrer qu'un élément $(a, e) \in R$ est inversible dans R si et seulement si a est inversible dans A .
2. Montrer qu'un idéal premier Q de R est sous la forme $Q = P \ltimes J$, où P est un idéal premier de A .
3. Montrer que R est Noethérien si et seulement si A est Noethérien.
(Indication : Un anneau est Noethérien si et seulement si tout idéal premier est de type fini).
4. Construire un anneau Noethérien non intègre.
5. Sous quelle condition $O \ltimes J$ est un idéal premier de R .



Concours Master Mathématiques et Applications de l'Algorithme
Séance : Topologie et intégration
Durée : 1 heure

2016-2017

A) Exercice de topologie

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé, dont on considère les ouverts et les fermés.

- 1) Montrer que la réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.
- 2) Montrer que l'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert.
- 3) Donner un exemple d'intersection d'ouverts qui n'est pas un ouvert.
- 4) Dédurre de 1) et de 2) que l'intersection quelconque de fermés est un fermé, et que la réunion d'un nombre fini de fermés est un fermé.

B) Exercice d'intégration

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable et $f_n : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ une suite d'applications mesurables.

Montrer que

- 1) $\sup_n f_n, \inf_n f_n, \limsup f_n$ et $\liminf f_n$ sont mesurables.
- 2) Si $f = \lim f_n$, f est mesurable.
- 3) $\{w \in \Omega / \lim f_n(w) \text{ existe dans } \bar{\mathbb{R}}\}$ est mesurable.