Concours d'Accès au Cycle Master Sciences et Techniques
à la FST de Fès
Epreuve d'Analyse
Durée 1h

Exercice 1 *On se propose d'obtenir le développement en série entière de la fonction tangente. Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on pose $f(x) = \tan x$*

1. *En remarquant que $f' = 1 + f^2$, montrer qu'il existe une suite $(P_n)_n$ de polynômes à coefficients dans $\mathbb{N}$ telle que $f^{(n)} = P_n \circ f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
2. *En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que la série de MacLaurin de f a un rayon de convergence R supérieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$*
3. *On note a_n les coefficients du développement précédent et g la somme de la série entière $\sum a_n x^n$.*
   Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$(n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$$

   En déduire que, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $f(x) = g(x)$, et que $R = \frac{\pi}{2}$.
4. *Calculer $a_0, a_1, \ldots, a_7$.*

Exercice 2 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1*

1. *On définit pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fixé, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \to g(t) = f(tx, ty)$*
   Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée.
2. *On suppose désormais que $f(tx, ty) = tf(x, y)$ pour tous $x, y, t \in \mathbb{R}$.*

   i) *Montrer que pour tous $x, y, t \in \mathbb{R}$, on a*

$$f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty)x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)y$$

   ii) *En déduire qu'il existe des réels α et β que l'on déterminera tels que, pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a*

$$f(x, y) = \alpha x + \beta y$$

Scanned by CamScanner

Scanné avec CamScanner

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2949 - Wadifa Info - page 1/4

Epreuve d'Algèbre (1h)*

Exercice 1 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} a & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

où $a, b, c \in \mathbb{C}$ sont trois racines $3^{ième}$ de l'unité, deux à deux distinctes et $x, y, z \in \mathbb{C}$.

1. *Montrer que A est diagonalisable.*
2. *Montrer que $A^3 = I_3$.*

Exercice 2 *Soit f une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$ et q sa forme quadratique associée définie pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par :*

$$q(x) = x_1^2 - x_2^2 - 2x_2x_1 - 2x_1x_3.$$

1. *Ecrire la matrice A de q relativement à la base canonique B_0 de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Donner une réduction de Gauss de q. Déduire la signature de q.*

Exercice 3 *Soient A un anneau, J un idéal de A et $R := A \propto J$ l'ensemble des couples (a, e) muni de l'addition composante par composante et de la multiplication définie par :*

$$(a, e)(b, f) = (ab, af + be).$$

On vérifie que R est un anneau, dit l'anneau extension triviale, ou simplement extension triviale, de A par J.

Soit $R := A \propto J$ l'extension triviale de A par un idéal J.

1. *Montrer qu'un élément $(a, e) \in R$ est inversible dans R si et seulement si a est inversible dans A.*
2. *Montrer qu'un idéal premier Q de R est sous la forme $Q = P \propto J$, où P est un idéal premier de A.*
3. *Montrer que R est Noethérien si et seulement si A est Noethérien. (Indication : Un anneau est Noethérien si et seulement si tout idéal premier est de type fini).*
4. *Construire un anneau Noethérien non intègre.*
5. *Sous qu'elle condition $O \propto J$ est un idéal premier de R.*

Scanned by CamScanner

Scanné avec CamScanner

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2949 - Wadifa Info - page 2/4

Concours Master Mathématiques et Applications [illegible] 2016-2017
Epreuve Topologie et intégration
Durée 1 heure

A). Exercice de topologie

Soit E un IR-espace vectoriel normé, dont on considère les ouverts et les fermés.

1) Montrer que la réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.

2) Montrer que l'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert.

3) Donner un exemple d'intersection d'ouverts qui n'est pas un ouvert.

4) Déduire de 1) et de 2) que l'intersection quelconque de fermés est un fermé, et que la réunion d'un nombre fini de fermés est un fermé.

B) Exercice d'intégration

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $f_n : \Omega \to \overline{R}$ une suite d'applications mesurables.

Montrer que

1) $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\overline{\lim} f_n$ et $\underline{\lim} f_n$ sont mesurables.

2) Si $f = \lim f_n$ f est mesurable.

3) $\{w \in \Omega / \lim f_n(w) \text{ existe dans } \overline{R}\}$ est mesurable.

Scanned by CamScanner

Scanné avec CamScanner

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2949 - Wadifa Info - page 3/4

Wadifa Info

www.wadifa-info.com

Le sujet suivant à préparer — **النموذج التالي للتحضير**

نموذج مباراة ولوج سلك الدكتوراه - جامعة مولاي إسماعيل - القانون العام والقانون الخاص - دورة 02

Modèle de concours d'accès au cycle du doctorat – Université Moulay Ismaïl – Droit public et droit privé – 2 novembre 2019

www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/666

Chaîne WhatsApp — **قناة واتساب**

المباريات الجديدة والنتائج كل يوم

Nouveaux concours et résultats chaque jour

wadifa-info.com/wa

Chaîne YouTube — **قناة يوتيوب**

امتحانات تجريبية بالتصحيح، بالدارجة

Examens blancs corrigés, expliqués en darija

youtube.com/@wadifainfo

Envoyer à un ami — **أرسل النموذج لصديق**

شارك هذا النموذج على واتساب مع من يحضّر معك

Partagez ce sujet sur WhatsApp

wa.me