

Master M.A. - Test d'Analyse

Ex. 1 Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières :

1) $\sum_{n \geq 0} x^n$.

2) $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$.

Ex. 2 Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction définie par :

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}, \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0).$$

Montrer que f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

Ex. 3 Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{x^4 - xy^3}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0. \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est continue en $(0,0)$.
- 2) Montrer que : $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
- 3) Montrer que f est différentiable en $(0,0)$.
- 4) Montrer que f est de classe C^1 en $(0,0)$.

Ex. 4 On considère $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme usuelle notée $\| \cdot \|$ ($n \geq 1$).

- 1) Rappeler la définition d'une boule ouverte et celle d'un ouvert au sens de la norme $\| \cdot \|$.
- 2) Montrer que toute boule ouverte est un ouvert.



Exercice 1 Soit $G = \langle a \rangle$ un groupe cyclique d'ordre n .

1. Montrer que tout sous-groupe de G est cyclique.
2. Soit $H \neq \{e\}$ un sous-groupe de G et m le plus petit entier strictement positif tel que $a^m \in H$ (e étant l'élément neutre de G).
Montrer que m divise n et que $|H| = \frac{n}{m}$.
3. Montrer que si $d \in \mathbb{N}$ est tel que d divise n , alors G possède un unique sous-groupe d'ordre d .

Application : Déterminer le sous-groupe de $\mathbb{Z}/104\mathbb{Z}$ d'ordre 4.

Exercice 2 On considère les trois suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par la donnée des premiers termes x_0 , y_0 et z_0 et par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -7x_n - y_n + 2z_n \\ y_{n+1} = -5x_n - 7y_n + 2z_n \\ z_{n+1} = -11x_n - 5y_n + 2z_n \end{cases}$$

1. Ecrire ce système sous forme matricielle.
2. En déduire que pour entier n , les valeurs de x_n , y_n et z_n en fonction de x_0 , y_0 et z_0 .



Concours Master MA

le 15-7-2016.

Epreuve de Probabilité et Statistique

Durée : 45 mn

Exercice I

On dispose de 15 livres. Cinq ont été écrits par l'auteur A, cinq par l'auteur B et 5 par l'auteur C. On se propose de les ranger sur une étagère. Combien y-a-il de dispositions possibles dans les conditions suivantes :

- Les auteurs sont rangés par ordre alphabétique et les livres d'un même auteur du plus ancien au plus récent
- Les auteurs sont rangés par ordre alphabétique et les livres d'un même auteur sont côte à côte mais sans ordre prédéfini
- Les auteurs sont placés sans ordre prédéfini, les livres d'un même auteur côte à côte mais sans ordre prédéfini.
- Les 15 livres sont placés sans ordre prédéfini.

Exercice II

Une roulette contient 36 cases numérotées de 1 à 36, dont 18 sont rouges et 18 sont noires, plus une case numérotée 0, verte.

Un joueur qui mise sur la couleur rouge ou noire, gagne deux fois sa mise si la couleur mise sort.

Si ce joueur mise sur un numéro de 1 à 36 qui sort, il gagne 36 fois sa mise.

Toute mise sur le numéro 0 est interdite.

Le joueur mise au hasard a DH sur une couleur. Soit X_1 , son gain.

- Trouver la loi de X_1 , puis calculer $E(X_1)$ et $V(X_1)$.

- Le joueur mise maintenant a DH au hasard sur l'un des numéros de 1 à 36.

Déterminer la loi de la variable aléatoire réelle X_2 égale au gain du joueur. Calculer $E(X_2)$ et $V(X_2)$.

- Si vous aviez a DH à miser, miseriez vous sur un numéro de 1 à 36 ou sur une couleur rouge ou noire.



**Concours d'entrée aux filières Master
Mathématique et Application au Calcul Scientifique
Pour l'année universitaire 2016/2017
Topologie**

Exercice (20 pts= 3+3+3+3+3+5)

Le but de cet exercice est de donner un exemple de partie A de $\mathbb{R}$ pour laquelle les ensembles

$$(1) \quad A, \bar{A}, \overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{\bar{A}}, \overset{\circ}{\overset{\circ}{A}}, \overset{\circ}{\overset{\circ}{\bar{A}}}$$

sont deux à deux distincts

Soit A une partie d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$

1. Donner la définition de l'adhérence $\bar{A}$ de A
2. Caractériser les points de l'intérieur $\overset{\circ}{A}$ de A
3. Montrer que lorsque A n'est ni ouvert ni fermé A est différent que tous les autres ensembles de (1)
4. On suppose que
 $a \in A$ est un point isolé de A (c'est à dire qu'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \cap A = \{a\}$).
Montrer que dans ce cas l'adhérence et l'intérieur de A sont différents
5. Soit b un point isolé du complémentaire de A . Montrer que $b \in \overset{\circ}{\bar{A}} \setminus A$ et en particulier que $\overset{\circ}{A} \neq \overset{\circ}{\bar{A}}$

6. Trouver les parties $A, \bar{A}, \overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{\bar{A}}, \overset{\circ}{\overset{\circ}{A}}, \overset{\circ}{\overset{\circ}{\bar{A}}}$ pour la partie

$$A =]0, 1[\cup]1, 2[\cup (2 \cap]2, 3[) \cup \{4\}$$

En déduire qu'elles sont deux à deux distinctes