

Test d'Analyse

Ex. 1 Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières :

1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$
 $\Rightarrow r < 1$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$
 $\Rightarrow r < 1$

$\Rightarrow -1, 1[$

$\sum (x^n)^{r-1}$

Ex. 2 Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction définie par :

$$f(x,y) = \frac{x^2 - xy}{x^2 + y^2}, \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0).$$

Montrer que f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

Ex. 3 Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{x^3 y - y^4}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0. \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en $(0,0)$. ✓

2) Montrer que : $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. ✓

3) Montrer que f est différentiable en $(0,0)$. ✓

4) Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Que pouvez-vous conclure ? ✓

Ex. 4 On considère $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme usuelle notée $\|-\|$ ($n \geq 1$).

1) Rappeler la définition d'une boule ouverte et celle d'un ouvert au sens de la norme $\|-\|$.

2) Montrer que l'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert.

$\forall \epsilon > 0 \exists$



Epreuve d'Algèbre (1h)^o

Exercice 1 Soit A une matrice carrée telle que $A^3 = 0$ et $A^2 \neq 0$.

1. Calculer le polynôme minimal de A .
2. A est-elle diagonalisable ? Justifier par deux méthodes différentes.

Exercice 2

1. Montrer qu'un groupe où tout élément est involutif (c'est à dire que $x^2 = e$ pour tout x de G) est commutatif.
2. Donner la définition d'un anneau Noethérien. Donner un exemple d'anneau Noethérien et un exemple d'anneau non Noethérien.
3. Caractériser les idéaux premiers de l'anneau produit $A \times B$, où A et B sont deux anneaux commutatifs et unitaires.

Exercice 3 Soit l'anneau $R = K[X]/(X^2)$, où K est un corps et X une indéterminée.

1. Montrer que R admet un seul idéal propre.
2. Dédurre que R est local (c'est à dire admet un seul idéal maximal) et Noethérien.



Concours d'entrée au master MACS
Pour l'année universitaire 2015/2016

Exercice 1. On considère le (PL) suivant :

$$(P) \begin{cases} \text{Min } z = -50x - 30y \\ 10x + 6y \leq 45 \\ 4x + 6y \leq 36 \\ 2x + 6y \leq 27 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{min } z = -50x - 30y$$

$$10x + 6y - z = 45$$

$$4x + 6y - z = 36$$

$$2x + 6y - z = 27$$

1. Donner la forme standard de (P)
2. Résoudre le problème (P)
3. Montrer que le problème (P) est dégénérée
4. Donner le problème dual de (P).

Qu'ils sont les grands titres que vous avez vus (facultatif)

- 1) en optimisation ?
- 2) en recherche opérationnelle ?
- 3) en théorie des graphes ?

méthode de syl
tableau



Concours MACS
Analyse Numérique

Soit le système non linéaire suivant:

18

$$(S) \begin{cases} \sin(x_1 - 1) + \frac{a}{2}x_2^2 = 1 \\ \frac{a}{2}x_1^2 + \sin(x_2 - 1) + \frac{a}{2}x_3^2 = 1 \\ \frac{a}{2}x_2^2 + \sin(x_3 - 1) = 1 \end{cases}$$

1) Pour quelles valeurs du paramètre a , on peut déterminer le vecteur $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})^T$, l'approximation de la solution de (S) obtenue en effectuant un pas de la méthode de Newton à partir de $x^{(0)} = (1, 1, 1)^T$. Ecrire sa forme.

2) Si A désigne la matrice Jacobienne associée à (S) en $x^{(0)}$, Ecrire le schéma de Gauss-Seidel pour la détermination de $x^{(1)}$ et discuter suivant le paramètre a la convergence.

3)-Pour $a \neq 0$, déduire la convergence du schéma de Relaxation associé et fournir le $\omega_{optimal}$ en fonction de a .

4)-Pour $a = \frac{1}{2}$, écrire l'algorithme du gradient conjugué à la recherche de $x^{(1)}$.

5)- Pour $a = 1$, décomposer A sous la forme $A = QR$, où Q est une matrice orthogonale et R une matrice triangulaire supérieure à déterminer.



Epreuve statistique
Concours Master MA
Durée: 30 min

Exercice I

Un organisme sans but lucratif, soucieux de l'environnement, a effectué une enquête sur les déchets dangereux auprès des résidents d'une municipalité de la Montérégie.

Une question était la suivante :

Croyez-vous que l'exposition aux additifs et aux produits chimiques toxiques présents dans les aliments que vous consommez constitue une menace sérieuse pour votre santé et celle de votre famille ?

Oui Non je ne sais pas

Sur 425 répondants 115 considèrent que cette exposition est une menace sérieuse pour leur santé

- Déterminer avec un niveau de confiance de 95%, un intervalle de confiance pour l'ensemble des résidents de cette municipalité qui considèrent que l'exposition aux additifs et aux produits chimiques toxiques constitue une menace sérieuse pour la santé
- Quelle est la marge d'erreur du sondage au niveau de confiance de 95%.

Exercice II:

L'entreprise CBM systèmes, spécialisée dans la fabrication et la vente des logiciels de gestion de projet, examine la possibilité d'augmenter le nombre de personnes affectées à son service à la clientèle. Le responsable de service aimerait connaître si le temps passé (en minutes) à répondre aux appels de service des logiciels est plus important pour les appels classés « assistance technique » ou pour ceux classés « renseignements généraux ».

Les résultats suivants ont été obtenus par un échantillon d'appels des deux catégories

	Renseignements généraux	Assistance technique
Nombre d'appels	$n_1 = 32$	$n_2 = 25$
Durée moyenne	8,56	16,78
Variance	29,85	39,97

- Peut-on considérer comme vraisemblable et ceci au seuil de signification $\alpha = 0,05$, l'hypothèse selon laquelle la variabilité des appels est identique, peu importe la catégorie d'appels ?
- On envisage d'ajouter une autre personne ressource si les appels classés « assistance technique » requièrent en moyenne, une durée de plus de 12 minutes comparés à ceux classés « renseignements généraux ». En utilisant un seuil de signification $\alpha = 0,01$, est ce que l'ajout d'une autre personne-ressource serait justifié ?

N.B. Si Z est une variable aléatoire suivant une loi normale centrée et réduite
 $P(Z > z_{0,025}) = 0,025$ implique que le seuil $z_{0,025} = 1,96$

Le seuil de loi de Fisher pour $\alpha = 0,025$ avec 31 et 24 degré de liberté est $F_{0,025, 31, 24} = 2,2$

Le seuil de loi de Fisher pour $\alpha = 0,025$ avec 24 et 31 degré de liberté est $F_{0,025, 24, 31} = 2,1189$

Le seuil de la loi de Student pour $\alpha = 0,01$ et un degré de liberté de 55 est $t_{0,01, 55} = 2,396$

Scanned by CamScanner