

Test d'Analyse

SABB/

Ex. 1 a) Calculer : $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

b) Montrer que : $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Ex. 2 On considère la suite numérique définie par : $u_0 = 0$, $u_{n+1} = 0,9 u_n + 0,1$.

1) Calculer u_1 et u_2 .

2) On considère la suite définie pour $n \geq 0$: $v_n = 1 - u_n$.

Montrer que (v_n) est une suite géométrique, et exprimer v_n en fonction de n .

3) Dédurre de 2) l'expression de u_n en fonction de n , et déterminer alors : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

Ex. 3 Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction définie par :

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0).$$

Montrer que f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

Ex. 4 Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x,y) = \frac{x^4 - xy^3}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0. \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en $(0,0)$.

2) Montrer que : $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

3) Montrer que f est différentiable en $(0,0)$.

4) Montrer que f est de classe C^1 en $(0,0)$.

5) Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Que pouvez-vous conclure ?

Concours d'accès en première année du cycle MASTER



Epreuve d'Algèbre

Durée : 45mn



Exercice 1 Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. 10 points :

Montrer qu'il existe une matrice inversible P d'ordre $(4,4)$ telle que

$$T = P^{-1}AP \text{ où } T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. 5 points :

Soit B la matrice, $B = T - I_4$. Calculer B^2 , B^3 et B^4 . En déduire T^n pour $n \geq 4$.

3. 5 points :

Calculer A^n pour $n \geq 4$.



Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté Des Sciences et Techniques de
Fès



Concours d'entrée au Master MACS
Pour l'année universitaire 2014/2015
Epreuve de programmation mathématique

SABBAV
~

Exercice 1 (6pts) : Planification de la production

Une entreprise fabrique deux produits A et B à partir de 3 matières M_1 , M_2 et M_3 . Les stocks sont 300 tonnes de M_1 , 400 tonnes de M_2 et 250 tonnes de M_3 . Pour fabriquer une tonne de A, il faut 1 tonne de M_1 et 2 tonnes de M_2 . Pour fabriquer une tonne de B, il faut 1 tonne de M_1 , 1 tonne de M_2 et 1 tonne de M_3 . La vente d'une tonne de A rapporte un profit de 50 Dh, celle de B, un profit de 100Dh. Le problème de l'entreprise est de savoir quelles quantités des produits A, B doit-elle fabriquer pour maximiser son profit ?

Modéliser ce problème sous forme d'un programme mathématique linéaire.

Exercice 2 (6 pts): Tracer le graphe du domaine réalisable du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } z = 2x + y \\ \text{sujet à } \begin{array}{l} x - y \leq 6 \\ 2x + y \leq 24 \\ y \leq 20 \\ x, y \geq 0 \end{array} \end{array} \right.$$

Exercice 3 (8pts): Appliquer la méthode du Simplexe pour vérifier que le problème suivant n'admet pas de solution optimale :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Min } z = x_1 - 2x_2 \\ \text{sujet à } \begin{array}{l} -2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \end{array} \right.$$

□

Scanned by CamScanner

SABBAR
Σ

Soit le système non linéaire suivant:

$$(S) \begin{cases} \sin x_1 + \frac{x_2}{3} = 1 \\ \frac{x_1}{3} + \sin x_2 + \frac{x_3}{3} = 1 \\ \frac{x_2}{3} + \sin x_3 = 1 \end{cases}$$

- 1) Décrire comment on peut obtenir $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})^T$, l'approximation de la solution de (S) obtenue en effectuant un pas de la méthode de Newton à partir de $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$.
- 2) Si A désigne la matrice Jacobienne associée à (S) en $x^{(0)}$. Ecrire le schéma de Jacobi pour la détermination de $x^{(1)}$ et étudier sa convergence.
- 3) Ecrire le schéma de Gauss-Seidel pour la détermination de $x^{(1)}$ et étudier sa convergence.
- 4) Décrire comment on peut avoir la plus grande valeur propre associée à A .
- 5) Ecrire les algorithmes du gradient et du gradient conjugué à la recherche de $x^{(1)}$.



2014-2015

Concours du Master MAOS

Epreuve de Probabilités et Statistique

Durée : 20 mn

SABBAR

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et admettant une variance.

1) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles admettant une espérance et une variance.

On pose $m_k = E(X_k)$ et on suppose que $V(\sum_{k=1}^n X_k) = o(n^2)$

2) Montrer que la suite des variables aléatoires réelles $(M_n)_{n \geq 1}$, définie par

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_n}{n} \text{ converge en probabilité vers } 0$$

(On dit qu'une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i \geq 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire X si pour tout $\varepsilon > 0$ $P(|X_n - E(X)| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.)