18/07/2017 | Master Mathématiques et Applications | Durée : 3h

Concours d'entrée en 1ère année du Master Mathématiques et Applications

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Les quatres parties doivent être rédigées sur des feuilles séparées.
Les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés.

PARTIE I

Exercice 1. *(2 pts = 1 pt + 1 pt)*

1. Pour quelles valeurs du nombre réel λ définit-on une norme sur $\mathbb{R}^2$ par $N_\lambda(x,y) = \sqrt{x^2+2\lambda xy+y^2}$.
2. Comparer les normes N_λ et N_α.

Exercice 2. *(2.5 pts = 1.5 pts + 1 pt)*
Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|(x,y)\|_1 = |x|+|y|$.
On définit l'application $f:\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \Big(\frac{1}{4}\sin(x+y)\ ,\ 1+\frac{2}{3}\arctan(x-y)\Big).$$

1.
   (a) Démontrer qu'il existe une constante $k \in]0,1[$ telle que, quelque soient (x,y) et (x',y') dans $\mathbb{R}^2$, on a :
   $$\|f(x,y)-f(x',y')\|_1 \le k\ \|(x,y)-(x',y')\|_1.$$
   (b) En déduire que le système
   $$\begin{cases} \frac{1}{4}\sin(x+y) = x \\ 1+\frac{2}{3}\arctan(x-y) = y \end{cases}$$
   admet une unique solution dans $\mathbb{R}^2$.
2. Aurait-on pu appliquer la même méthode en utilisant la norme $\|.\|_\infty$ au lieu de $\|.\|_1$?
   avec $\|(x,y)\|_\infty = \sup(|x|,|y|)$

PARTIE II

Exercice 3. *(2.5 pts = 0.5 pt + 1 pt + 1 pt)*
On considère la fonction

$$\begin{aligned} g:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{1\} \\ x &\longrightarrow \tfrac{1}{x-1} \end{aligned}$$

1. Donner le degré et l'expression du polynôme de Lagrange qui interpole la fonction $g(x)$ aux points 0, $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$.
2. Trouver les coefficients c_0, c_1 et c_2 tels que pour tout polynôme p de degré inférieur ou égal à 2, on ait
   $$\int_0^2 p(t)\,dt = c_0 p(0) + c_1 p(1) + c_2 p(2)$$
3. En utilisant un changement de variable, déduire de la formule précédente les coefficients d_0, d_1 et d_2 tels que pour tout polynôme q de degré inférieur ou égal à 2, on ait
   $$\int_0^{\frac{2}{3}} q(t)\,dt = d_0 q(0) + d_1 q(\tfrac{1}{3}) + d_2 q(\tfrac{2}{3})$$

PARTIE III

Exercice 4. *(1.5 pts = 1 pt+ 0.5 pt)*

1. Ecrire un algorithme qui comporte une fonction qui calcule le produit de deux matrices non carrées.
2. Utiliser cette fonction pour calculer D(M,M)=A(M,N)*B(N,P)*C(P,M)

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو
Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2927 - Wadifa Info - page 1/3

Exercice 5. *(2.5 pts)*
Ecrire un algorithme qui lit les coordonnées de trois points A, B et C du plan et qui permet de dire si ces trois points forment un triangle rectangle, isocèle, équilatéral ou autre.

PARTIE IV

Exercice 6. *(2 pts = 1 pt + 1 pt)*
Soit k un entier supérieur ou égal à 2. On défini la suite (u_n), pour $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2.} + \ldots + \frac{1}{kn}.$$

1. Montrer que (u_n) est croissante.
2. Montrer que (u_n) est convergente.

Exercice 7. *(1.5 pts)*
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell.$$

Exercice 8. *(2.5 pts = 1 pt + 1.5 pt)*

1. Montrer que la relation $x^4 + y^3 - 2x^2y - 1 = 0$ définit y comme fonction de x au voisinage du point $(0, 1)$. Calculer alors la dérivée de cette fonction en 0.
2. Former un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction qui à x associe y.

Exercice 9. *(3 pts = 0.5 pt + 1.5 pts + 1 pt)*
Soit $E = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid d^\circ P \leq n\}$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n ($n \in \mathbb{N}$) à coefficients dans $\mathbb{C}$. Soit

$$\begin{aligned} f : \quad & E \longrightarrow E \\ & P \longmapsto f(P) = (X-a)[P'(X) + P'(a)] - 2[P(X) - P(a)], \end{aligned}$$

où $a \in \mathbb{C}$ est fixé.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer Im f et Ker f. (On pourra utiliser la base $B = \{e_k\}$ de E définie par $e_k = (X-a)^k$).
3. Trouver les valeurs propres et vecteurs propres de f.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو
Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2927 - Wadifa Info - page 2/3

Wadifa Info

www.wadifa-info.com

Le sujet suivant à préparer — **النموذج التالي للتحضير**

نموذج مباراة ولوج سلك الدكتوراه - جامعة مولاي إسماعيل - القانون العام والقانون الخاص - دورة 02

Modèle de concours d'accès au cycle du doctorat – Université Moulay Ismaïl – Droit public et droit privé – 2 novembre 2019

www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/666

Chaîne WhatsApp — **قناة واتساب**

المباريات الجديدة والنتائج كل يوم

Nouveaux concours et résultats chaque jour

wadifa-info.com/wa

Chaîne YouTube — **قناة يوتيوب**

امتحانات تجريبية بالتصحيح، بالدارجة

Examens blancs corrigés, expliqués en darija

youtube.com/@wadifainfo

Envoyer à un ami — **أرسل النموذج لصديق**

شارك هذا النموذج على واتساب مع من يحضّر معك

Partagez ce sujet sur WhatsApp

wa.me