

**Concours d'entrée en 1^{ère} année du Master Mathématiques et Applications****EPREUVE DE MATHÉMATIQUES**

Les quatre parties doivent être rédigées sur des feuilles séparées.
Les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés.

PARTIE I**Exercice 1.** (2 pts = 1 pt + 1 pt)

1. Pour quelles valeurs du nombre réel λ définit-on une norme sur $\mathbb{R}^2$ par $N_\lambda(x, y) = \sqrt{x^2 + 2\lambda xy + y^2}$.
2. Comparer les normes N_λ et N_0 .

Exercice 2. (2.5 pts = 1.5 pts + 1 pt)

Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$.

On définit l'application $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{4} \sin(x+y), 1 + \frac{2}{3} \arctan(x-y) \right).$$

1.

- (a) Démontrer qu'il existe une constante $k \in]0, 1[$ telle que, quelque soient (x, y) et (x', y') dans $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\|f(x, y) - f(x', y')\|_1 \leq k \|(x, y) - (x', y')\|_1.$$

- (b) En déduire que le système

$$\begin{cases} \frac{1}{4} \sin(x+y) = x \\ 1 + \frac{2}{3} \arctan(x-y) = y \end{cases}$$

admet une unique solution dans $\mathbb{R}^2$.

2. Aurait-on pu appliquer la même méthode en utilisant la norme $\|\cdot\|_\infty$ au lieu de $\|\cdot\|_1$?
avec $\|(x, y)\|_\infty = \sup(|x|, |y|)$

PARTIE II**Exercice 3.** (2.5 pts = 0.5 pt + 1 pt + 1 pt)

On considère la fonction

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ x \mapsto \frac{1}{x-1}$$

1. Donner le degré et l'expression du polynôme de Lagrange qui interpole la fonction $g(x)$ aux points $0, \frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$.
2. Trouver les coefficients c_0, c_1 et c_2 tels que pour tout polynôme p de degré inférieur ou égal à 2, on ait

$$\int_0^2 p(t) dt = c_0 p(0) + c_1 p(1) + c_2 p(2)$$

3. En utilisant un changement de variable, déduire de la formule précédente les coefficients d_0, d_1 et d_2 tels que pour tout polynôme q de degré inférieur ou égal à 2, on ait

$$\int_0^{\frac{2}{3}} q(t) dt = d_0 q(0) + d_1 q\left(\frac{1}{3}\right) + d_2 q\left(\frac{2}{3}\right)$$

PARTIE III**Exercice 4.** (1.5 pts = 1 pt + 0.5 pt)

1. Ecrire un algorithme qui comporte une fonction qui calcule le produit de deux matrices non carrées.
2. Utiliser cette fonction pour calculer $D(M, M) = A(M, N) * B(N, P) * C(P, M)$



Exercice 5. (2.5 pts)

Ecrire un algorithme qui lit les coordonnées de trois points A, B et C du plan et qui permet de dire si ces trois points forment un triangle rectangle, isocèle, équilatéral ou autre.

PARTIE IV

Exercice 6. (2 pts = 1 pt + 1 pt)

Soit k un entier supérieur ou égal à 2. On définit la suite (u_n) , pour $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{kn}.$$

1. Montrer que (u_n) est croissante.
2. Montrer que (u_n) est convergente.

Exercice 7. (1.5 pts)

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell.$$

Exercice 8. (2.5 pts = 1 pt + 1.5 pt)

1. Montrer que la relation $x^4 + y^3 - 2x^2y - 1 = 0$ définit y comme fonction de x au voisinage du point $(0, 1)$. Calculer alors la dérivée de cette fonction en 0.
2. Former un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction qui à x associe y .

Exercice 9. (3 pts = 0.5 pt + 1.5 pts + 1 pt)

Soit $E = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid d^0 P \leq n\}$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n ($n \in \mathbb{N}$) à coefficients dans $\mathbb{C}$. Soit

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow E \\ P &\mapsto f(P) = (X - a)[P'(X) + P'(a)] - 2[P(X) - P(a)], \end{aligned}$$

où $a \in \mathbb{C}$ est fixé.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$. (On pourra utiliser la base $B = \{e_k\}$ de E définie par $e_k = (X - a)^k$).
3. Trouver les valeurs propres et vecteurs propres de f .