

**Concours d'entrée en première année du Master  
Mathématiques et Applications**

**Epreuve de Mathématiques  
Durée : 3 heures**

Les deux parties doivent être rédigées sur des feuilles séparées.  
Les calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.

**PARTIE I**

**Exercice 1** ( 3.5 pts = 0.5 pt + 1.5 pts + 1.5 pts ) Soit  $E = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid d^0 P \leq n\}$ , l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) à coefficients dans  $\mathbb{C}$ . Soit

$$f : E \longrightarrow E \\ P \longmapsto f(P) = (X - a)[P'(X) + P'(a)] - 2[P(X) - P(a)],$$

où  $a \in \mathbb{C}$  est fixé.

1. Montrer que  $f$  est linéaire.
2. Déterminer  $\text{Im } f$  et  $\text{Ker } f$ . (On pourra utiliser la base  $B = \{e_k\}$  de  $E$  définie par  $e_k = (X - a)^k$ ).
3. Trouver les valeurs propres et vecteurs propres de  $f$ .

**Exercice 2** ( 3 pts = 2 pts + 1 pt )

1. Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions numériques définies sur  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  et  $g$  sont  $n$  fois dérivables en un point  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Montrer que la dérivée d'ordre  $n$  de la fonction produit  $fg$ , en  $x_0$  est donnée par

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{p=0}^n C_n^p f^{(p)}(x_0) g^{(n-p)}(x_0),$$

où  $f^{(p)}(x_0)$  désigne la dérivée d'ordre  $p$  de  $f$  en  $x_0$ , et

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

2. Soit  $\alpha$  un nombre réel. Calculer la dérivée d'ordre  $n$  de la fonction réelle définie par :

$$h(x) = e^{x \cos \alpha} \cos(x \sin \alpha).$$

**Exercice 3** ( 2 pts = 1 pt + 1 pt ) Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$  à coefficients réels,  $b \in \mathbb{R}^n$  et  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^n$  par

$$f(x) = \frac{1}{2} x^\top A x + b^\top x.$$

Démontrer que  $f$  est différentiable et calculer son gradient en tout point  $x \in \mathbb{R}^n$ .

## PARTIE II

**Exercice 4** ( 3 pts = 0.5 pt + 0.5 pt + 0.5 pt + 0.5 pt + 1 pt )

1. Quels sont les ensembles ouverts d'une topologie associée à une distance  $d$ .
2. Donner un exemple d'un espace topologique dont la topologie ne provient pas d'une distance non triviale.
3. Donner un exemple d'un espace vectoriel métrisable dont la distance ne provient pas d'une norme.
4. Donner un exemple d'un ensemble connexe par arc qui n'est pas convexe et un autre ensemble connexe qui n'est pas connexe par arc.
5. Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. Montrer que tout ensemble compact est fermé et borné. La réciproque est-elle vraie ?

**Exercice 5** ( 2.5 pts = 1.5 pts + 1 pt ) On définit  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 1$  et  $t_2 = 3$  ;  $f(t_0) = 1$ ,  $f(t_1) = 0$  et  $f(t_2) = 4$ .

1. Utiliser les différences divisées pour déterminer le polynôme d'interpolation de Newton  $p(t)$  de degré inférieur ou égal à 2 tel que :  $p(t_i) = f(t_i)$ ,  $i = 0, 1, 2$ .
2. Donner l'expression de  $p(t)$  dans la base de Lagrange. Comparer.

**Exercice 6** ( 2.5 pts = 1 pt + 1 pt + 0.5 pt ) Soit une fonction  $f$  d'une variable réelle  $x$ . On se propose de calculer numériquement l'intégrale suivante

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

1. Décrire la méthode des rectangles pour calculer  $A$ .
2. Ecrire un algorithme qui permet de calculer  $A$  par la méthode des rectangles.
3. Combien d'opérations arithmétiques cela demande-t-il ?

**Exercice 7** ( 3.5 pts = 1.5 pts + 1 pt + 0.5 pt + 0.5 pt ) On note  $\mathcal{L}$  l'ensemble des fonctions lipschitziennes de  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , c'est à dire telles qu'il existe  $k \in \mathbb{R}_+$  tel que, pour tout  $x, y \in [0, 1]$ ,  $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ . On note  $\mathbb{C}^1$  l'ensemble des fonctions de  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  de classe  $C^1$ , c'est à dire dérivables à dérivée continue.

1. Montrer que  $\mathcal{L}$  est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , que  $\mathcal{L}$  contient  $\mathbb{C}^1$  et est de dimension infinie.
2. On pose, pour tout  $f \in \mathcal{L}$  :

$$N_1(f) = |f(0)| + \sup_{(x,y) \in [0,1]^2, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

$$N_2(f) = |f(0)| + \sup_{x \in [0,1]} \frac{|f(x) - f(0)|}{|x|}$$

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

$$\lambda(f) = \|f\|_{\infty} + \sup_{(x,y) \in [0,1]^2, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}.$$

- (a) Montrer que  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $\|\cdot\|_{\infty}$  et  $\lambda$  sont des normes sur  $\mathcal{L}$ .
- (b) En considérant la suite  $f_n(x) = \sin(2\pi nx)$ , montrer que  $N_2$  n'est pas équivalente à  $\|\cdot\|_{\infty}$ .
- (c) Montrer que  $N_1$  n'est équivalente ni à  $\|\cdot\|_{\infty}$ , ni à  $N_2$ .