UNIVERSITÉ HASSAN PREMIER
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE - SETTAT

Le 6 septembre 2013

Concours d'entrée en première année du Master Mathématiques et Applications

Epreuve de Mathématiques
Durée : 3 heures

Les deux parties doivent être rédigées sur des feuilles séparées.
Les calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.

PARTIE I

Exercice 1 *(3.5 pts = 0.5 pt+1.5 pts + 1.5 pts)* Soit $E = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid d^\circ P \leqslant n\}$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n ($n \in \mathbb{N}$) à cœfficients dans $\mathbb{C}$. Soit

$$\begin{aligned} f \ : \quad & E \longrightarrow E \\ & P \longmapsto f(P) = (X-a)[P'(X)+P'(a)] - 2[P(X)-P(a)], \end{aligned}$$

où $a \in \mathbb{C}$ est fixé.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer Im f et Ker f. (On pourra utiliser la base $B = \{e_k\}$ de E définie par $e_k = (X-a)^k$).
3. Trouver les valeurs propres et vecteurs propres de f.

Exercice 2 *(3 pts = 2 pts+1 pt)*

1. Soit f et g deux fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$. On suppose que f et g sont n fois dérivables en un point $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que la dérivée d'ordre n de la fonction produit fg, en x_0 est donnée par

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p f^{(p)}(x_0) g^{(n-p)}(x_0),$$

où $f^{(p)}(x_0)$ désigne la dérivée d'ordre p de f en x_0, et

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

2. Soit α un nombre réel. Calculer la dérivée d'ordre n de la fonction réelle définie par :

$$h(x) = e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha).$$

Exercice 3 *(2 pts = 1 pt+1 pt)* Soit A une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ à cœfficients réels, $b \in \mathbb{R}^n$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax + b^\top x.$$

Démontrer que f est différentiable et calculer son gradient en tout point $x \in \mathbb{R}^n$.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2925 - Wadifa Info - page 1/4

PARTIE II

Exercice 4 *(3 pts = 0.5 pt+0.5 pt+0.5 pt+0.5 pt+1pt)*

1. Quels sont les ensembles ouverts d'une topologie associée à une distance d.
2. Donner un exemple d'un espace topologique dont la topologie ne provient pas d'une distance non triviale.
3. Donner un exemple d'un espace vectoriel métrisable dont la distance ne provient pas d'une norme.
4. Donner un exemple d'un ensemble connexe par arc qui n'est par convexe et un autre ensemble connexe qui n'est pas connexe par arc.
5. Soit $(E, \| \|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que tout ensemble compact est fermé et borné. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 5 *(2.5 pts = 1.5 pts+1 pt)* On définit $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ et $t_2 = 3$; $f(t_0) = 1$, $f(t_1) = 0$ et $f(t_2) = 4$.

1. Utiliser les différences divisées pour déterminer le polynôme d'interpolation de Newton $p(t)$ de degré inférieur ou égal à 2 tel que : $p(t_i) = f(t_i)$, $i = 0, 1, 2$.
2. Donner l'expression de $p(t)$ dans la base de Lagrange. Comparer.

Exercice 6 *(2.5 pts = 1 pt+1 pt+0.5 pt)* Soit une fonction f d'une variable réelle x. On se propose de calculer numériquement l'intégrale suivante

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

1. Décrire la méthode des rectangles pour calculer A.
2. Ecrire un algorithme qui permet de calculer A par la méthode des rectangles.
3. Combien d'opérations arithmétiques cela demande t-il ?

Exercice 7 *(3.5 pts = 1.5 pts+1 pt +0.5 pt + 0.5 pt)* On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des fonctions *lipschitziennes* de $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est à dire telles qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x, y \in [0, 1]$, $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$. On note $\mathbb{C}^1$ l'ensemble des fonctions de $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de classe C^1, c'est à dire dérivables à dérivée continue.

1. Montrer que $\mathcal{L}$ est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, que $\mathcal{L}$ contient $\mathbb{C}^1$ et est de dimension infinie.
2. On pose, pour tout $f \in \mathcal{L}$:

$$N_1(f) = |f(0)| + \sup_{(x,y)\in[0,1]^2, x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

$$N_2(f) = |f(0)| + \sup_{x\in]0,1]} \frac{|f(x) - f(0)|}{|x|}$$

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2925 - Wadifa Info - page 2/4

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

$$\lambda(f) = \|f\|_\infty + \sup_{(x,y)\in[0,1]^2, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}.$$

(a) Montrer que N_1, N_2, $\|\ \|_\infty$ et λ sont des normes sur $\mathcal{L}$.

(b) En considérant la suite $f_n(x) = \sin(2\pi n x)$, montrer que N_2 n'est pas équivalente à $\|\ \|_\infty$.

(c) Montrer que N_1 n'est équivalente ni à $\|\ \|_\infty$, ni à N_2.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2925 - Wadifa Info - page 3/4

Wadifa Info

www.wadifa-info.com

Le sujet suivant à préparer — **النموذج التالي للتحضير**

نموذج مباراة ولوج سلك الدكتوراه - جامعة مولاي إسماعيل - القانون العام والقانون الخاص - دورة 02

Modèle de concours d'accès au cycle du doctorat – Université Moulay Ismaïl – Droit public et droit privé – 2 novembre 2019

www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/666

Chaîne WhatsApp — **قناة واتساب**

المباريات الجديدة والنتائج كل يوم

Nouveaux concours et résultats chaque jour

wadifa-info.com/wa

Chaîne YouTube — **قناة يوتيوب**

امتحانات تجريبية بالتصحيح، بالدارجة

Examens blancs corrigés, expliqués en darija

youtube.com/@wadifainfo

Envoyer à un ami — **أرسل النموذج لصديق**

شارك هذا النموذج على واتساب مع من يحضّر معك

Partagez ce sujet sur WhatsApp

wa.me