

Epreuve de Mathématiques
Master MOCASIM
Année Universitaire 2017-2018
Durée 2H

Questions de cours et applications

- 1) Donner la définition d'un ouvert de $\mathbb{R}$.
- 2) Donner la définition d'un compacte dans un espace topologique et donner une caractérisation d'un compacte dans un espace métrique.
- 3) Soient E un espace vectoriel normé et A, B deux parties de E .
 - i) Montrer que si B est un ouvert alors $A + B$ est aussi un ouvert.
 - ii) Montrer que si A et B sont des compacts alors $A + B$ l'est aussi.
 - iii) Montrer que si A est compacte et B fermé alors $A + B$ est un fermé.
- 4) On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme Euclidienne canonique. Montrer que l'application $F : x \rightarrow \|x\|$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et exprimer sa différentielle.
- 5) Donner quelques propriétés fondamentales des espaces $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1

- 1) Donner les définitions suivantes : La convergence simple et la convergence uniforme d'une suite de fonctions.
- 2) Donner la définition de la continuité uniforme d'une fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
- 3) soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions réelles qui converge uniformément vers une fonction f et soit g une fonction réelle uniformément continue. Montrer que la suite $(g \circ f_n)_n$ converge uniformément.

Exercice 2

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ à valeur dans $\mathbb{R}$. On

définit sur E les normes suivantes : $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$, $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$,
 $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$

- 1) Montrer que ces normes sont bien définies sur E .
- 2) Montrer que la norme $\|f\|_\infty$ est plus fine que $\|f\|_1$ et $\|f\|_2$ mais qu'elle n'est équivalente à aucune des deux normes (Indication : considérer la suite de fonctions suivante $f_n(x) = x^n$).

- 3) Comparer $\|f\|_1$ et $\|f\|_2$ et montrer qu'elles ne sont pas équivalentes (Indication : considérer la suite de fonctions suivante $f_n(x) = \sqrt{2n+1}x^n$).

Exercice 3

Calculer les limites des suites suivantes :

$$1) u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} t g^n(t) dt$$

$$2) v_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^n + e^t} dt$$

Exercice 4

Soit A une matrice carrée réelle d'ordre n . On suppose que la matrice A est de rang 1.

- 1) Montrer qu'ils existent deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n$ de normes 1 et un scalaire α tels que $A = \alpha (uv^T)$ (où v^T est le transposé du vecteur v).
- 2) Cette écriture est-elle unique? (Justifier votre réponse)

Exercice 5

Soient l'espace euclidien $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ muni du produit scalaire usuel et F le sous-espace vectoriel défini par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x + 2y - z + \sqrt{2}t = 0 \\ x - 3z = 0 \end{cases}$$

- 1) Déterminer $F^\perp$ (l'orthogonal de F).
- 2) Donner une base orthonormée de F et une base orthonormée de $F^\perp$.
- 3) Calculer la projection orthogonale du vecteur $v = (1, 1, 1, 1)$ sur F .
- 4) Calculer la distance de v à F et la distance de v à $F^\perp$.