Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

Epreuve de Mathématiques
Master MOCASIM
Année Universitaire 2017-2018
Durée 2H

Questions de cours et applications

1) Donner la définition d'un ouvert de $\mathbb{R}$.
2) Donner la dédinition d'un compacte dans un espace topologique et donner une caractérisation d'un compacte dans un espace métrique.
3) Soient E un espace vectoriel normé et A; B deux parties de E.
   i) Montrer que si B est un ouvert alors $A+B$ est aussi un ouvert.
   ii) Montrer que si A et B sont des compactes alors $A+B$ l'est aussi.
   iii) Montrer que si A est compacte et B fermé alors $A+B$ est un fermé.
4) On munit $\mathbb{R}^n$de la norme Euclidienne canonique. Montrer que l'application $F : x \longrightarrow \|x\|$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et exprimer sa différentielle.
5) Donner quelques propriétés fondamentales des espaces $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1

1) Donner les définitions suivantes : La convergence simple et la convergence uniforme d'une suite de fonctions.
2) Donner la définition de la continuité uniforme d'une fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
3) soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions réelles qui converge uniformément vers une fonction f et soit g une fonction réelle uniformément continue. Montrer que la suite $(g \circ f_n)_n$ converge uniformément.

Exercice 2

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ à valeur dans $\mathbb{R}$. On définit sur E les normes suivantes : $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$, $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$, $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$

1) Montrer que ces normes sont bien définies sur E.
2) Montrer que la norme $\|f\|_\infty$ est plus fine que $\|f\|_1$ et $\|f\|_2$ mais qu'elle n'est équivalente à aucune des deux normes(Indication : considérer la suite de fonctions suivante $f_n(x) = x^n$).

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2912 - Wadifa Info - page 1/3

3) Comparer $\|f\|_1$ et $\|f\|_2$ et montrer qu' elles ne sont pas équivalentes (Indication : considérer la suite de fonctions suivante $f_n(x) = \sqrt{2n+1}x^n$).

Exercice 3

Calculer les limites des suites suivantes :

1) $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^n(t)\,dt$

2) $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^n + e^t}\,dt$

Exercice 4

Soit A une matrice carrée réelle d'ordre n. On suppose que la matrice A est de rang 1.

1) Montrer qu'ils existent deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n$ de normes 1 et un scalaire α tels que $A = \alpha\left(uv^T\right)$ (où v^T est le transposé du vecteur v).

2) Cette écriture est-elle unique? (Justifier votre réponse)

Exercice 5

Soient l'espace euclidien $(\mathbb{R}^4, \langle\ ,\ \rangle)$ muni du produit scalaire usuel et F le sous-espace vectoriel défini par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x + 2y - z + \sqrt{2}t &= 0 \\ x - 3z &= 0 \end{cases}$$

1) Déterminer $F^\perp$ (l'orthogonal de F).

2) Donner une base **orthonormée** de F et une base **orthonormée** de $F^\perp$.

3) Calculer la projection orthogonale du vecteur $v = (1,1,1,1)$ sur F .

4) Calculer la distance de v à F et la distance de v à $F^\perp$.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2912 - Wadifa Info - page 2/3

Wadifa Info

www.wadifa-info.com

Le sujet suivant à préparer — **النموذج التالي للتحضير**

نموذج مباراة ولوج سلك الدكتوراه - جامعة مولاي إسماعيل - القانون العام والقانون الخاص - دورة 02

Modèle de concours d'accès au cycle du doctorat – Université Moulay Ismaïl – Droit public et droit privé – 2 novembre 2019

www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/666

Chaîne WhatsApp — **قناة واتساب**

المباريات الجديدة والنتائج كل يوم

Nouveaux concours et résultats chaque jour

wadifa-info.com/wa

Chaîne YouTube — **قناة يوتيوب**

امتحانات تجريبية بالتصحيح، بالدارجة

Examens blancs corrigés, expliqués en darija

youtube.com/@wadifainfo

Envoyer à un ami — **أرسل النموذج لصديق**

شارك هذا النموذج على واتساب مع من يحضّر معك

Partagez ce sujet sur WhatsApp

wa.me