

Epreuve de Mathématiques
Master MOCASIM
Année Universitaire 2016-2017
Durée 2H

Exercice 1 : Topologie

- 1) Donner les définitions suivantes : Espace topologique séparé , espace topologique compact, espace de Banach.
- 2) Enoncer le théoreme de Bolzano- Weierstrass.
- 3) Soit (X, d) un espace metrique et soit F un compact de X .
 - i) Donner la caractérisation de la compacité de F en terme de suite.
 - ii) Montrer que F est fermé borné.
 - iii) On suppose que X est compact. Soient $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermé de X tels que $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$. Montrer qu'il existe un sous ensemble fini $J \subset I$ tel que $\bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset$.
- 4) Soit K un compact d'un espace metrique X et $x \in X$. Montrer qu'il existe $y \in K$ tel que $d(x, K) = d(x, y)$.
- 5) Soient K et L deux compacts de X , montrer que $K + L$ est compact.
- 6) Soit (X, d) un espace metrique compact. Montrer que X est complet.
- 7) Soient (X, d) et (Y, D) deux espaces métriques avec X compact. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Montrer que $f(X)$ est compact.

Exercice 2

- 1) Enoncer le théoreme de la convergence dominée de Lebesgue.
- 2) Enoncer le lemme de Fatou.
- 3) Soit la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(t) = (1 + \frac{t^2}{n})^{-n}$.
 - i) Etudier la convergence simple des f_n .
 - ii) On pose $\phi(x) = -x \ln(1 + \frac{t^2}{x})$ pour $x > 0$. Montrer que ϕ' est croissante et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi'(x) = 0$ et en déduire que ϕ est décroissante.
 - iii) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt$

Exercice 3

- I) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On muni E d'un produit scalaire $\langle ., . \rangle$ et de la norme associée $\|.\|$. Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\| ; \forall u, v \in E.$$

- II) Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Montrer que la forme bilinéaire symétrique suivante

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) &\longrightarrow \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t) \cdot Q(t) dt \end{aligned}$$

définie un produit scalaire sur E .

- III) On suppose pour la suite que $E = \mathbb{R}_1[X]$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 1 à coefficients réels muni de la base canonique $B_e = \{1, t\}$.

1) Donner la matrice qui représente la forme bilinéaire symétrique donnée ci-dessus relativement à la base B_e .

2) Soit q la forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique donnée ci-dessus. Un polynôme $P \in E$ s'écrit dans la base B_e par

$$P(t) = x \cdot 1 + y \cdot t \text{ où } x, y \in \mathbb{R}.$$

i) Donner l'expression de $q(P)$ dans la base B_e .

• ii) Opérer la réduction de Gauss sur q .

• iii) Donner une base orthonormale $\{Q_1, Q_2\}$ par rapport à q .

* 3) On muni E de la structure euclidienne associée au produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t) \cdot Q(t) dt$. Orthonormaliser la base $\{1, t\}$ à l'aide du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.