Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

Epreuve de Mathématiques
Master MOCASIM
Année Universitaire 2016-2017
Durée 2H

Exercice 1 : Topologie

1) Donner les definitions suivantes : Espace topologique séparé , espace topologique compact, espace de Banach.
2) Ennoncer le théoreme de Bolzano- Weierstrass.
3) Soit (X, d) un espace metrique et soit F un compact de X.
   i) Donner la caractérisation de la compacité de F en terme de suite.
   ii) Montrer que F est fermé borné.
   iii) On suppose que X est compact. Soient $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermé de X tels que $\cap_{i\in I} F_i = \emptyset$. Montrer qu'il existe un sous ensemble fini $J \subset I$ tel que $\cap_{i\in J} F_i = \emptyset$.
4) Soit K un compact d'un espace metriqe X et $x \in X$. Montrer qu'il existe $y \in K$ tel que $d(x, K) = d(x, y)$
5) Soient K et L deux compacts de X, montrer que $K + L$ est compact.
6) Soit (X, d) un espace metrique compact. Montrer que X est complet.
7) Soient (X, d) et (Y, D) deux espaces metriques avec X compact. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue. Montrer que $f(X)$ est compact.

Exercice 2

1) Ennoncer le théoreme de la convergence dominée de Lebesgue.
2) Ennoncer le lemme de Fatou.
3) Soit la suite de fonctions $(f_n)_n$ dédinie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(t) = (1 + \frac{t^2}{n})^{-n}$.
   i) Etudier la convergence simple des f_n.
   ii) On pose $\phi(x) = -x\ln(1 + \frac{t^2}{x})$ pour $x > 0$. Montrer que ϕ' est croissante et que $\lim_{x\longrightarrow+\infty} \phi'(x) = 0$ et endéduire que ϕ est décroissante.
   iii) Calculer $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\, dt$

Exercice 3

I)) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On muni E d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$ et de la norme associée $\|.\|$. Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\| \ ; \forall u,\ v \in E.$$

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2911 - Wadifa Info - page 1/3

II) Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Montrer que la forme bilinéaire symétrique suivante

$$\begin{array}{rccl} < \cdot, \cdot > & : & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (P, Q) & \longrightarrow & < P, Q >= \int_0^1 P(t) \cdot Q(t)\, dt \end{array}$$

définie un produit scalaire sur E.

III) On suppose pour la suite que $E = \mathbb{R}_1[X]$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 1 à coefficients réels muni de la base canonique $B_c = \{1, t\}$.

1) Donner la matrice qui représente la forme bilinéaire symétrique donnée ci-dessus relativement à la base B_c.

2) Soit q la forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique donnée ci-dessus. Un polynôme $P \in E$ s'écrit dans la base B_c par

$$P(t) = x \cdot 1 + y \cdot t \quad \text{où} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

i) Donner l'expression de $q(P)$ dans la base B_c.

ii) Opérer la réduction de Gauss sur q.

iii) Donner une base orthonormale $\{Q_1, Q_2\}$ par rapport à q.

3) On muni E de la structure euclidienne associée au produit scalaire $< P, Q >= \int_0^1 P(t) \cdot Q(t)\, dt$. Orthonormaliser la base $\{1, t\}$ à l'aide du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2911 - Wadifa Info - page 2/3

Le sujet suivant à préparer — النموذج التالي للتحضير

نموذج مباراة ولوج سلك الدكتوراه - جامعة مولاي إسماعيل - القانون العام والقانون الخاص - دورة 02

Modèle de concours d'accès au cycle du doctorat – Université Moulay Ismaïl – Droit public et droit privé – 2 novembre 2019

www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/666

Chaîne WhatsApp — قناة واتساب

المباريات الجديدة والنتائج كل يوم

Nouveaux concours et résultats chaque jour

wadifa-info.com/wa

Chaîne YouTube — قناة يوتيوب

امتحانات تجريبية بالتصحيح، بالدارجة

Examens blancs corrigés, expliqués en darija

youtube.com/@wadifainfo

Envoyer à un ami — أرسل النموذج لصديق

شارك هذا النموذج على واتساب مع من يحضّر معك

Partagez ce sujet sur WhatsApp

wa.me