

Concours Commun Marocain	Session : 1996
Options : MM'-TA	Epreuve de Physique I
	Durée : 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

I. ELECTROSTATIQUE

On donne, en coordonnées sphériques :

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Soit une sphère creuse, de rayon R , conductrice, seule dans l'espace. On appelle Q la charge totale de la sphère et V_0 son potentiel.

On repère la position d'un point M de l'espace par les coordonnées sphériques (r, θ, φ) ; l'origine O étant le centre de la sphère.

1. Calcul de la capacité de la sphère

1.1. Justifier par des considérations de symétrie la direction du champ électrique $\vec{E}(M)$.

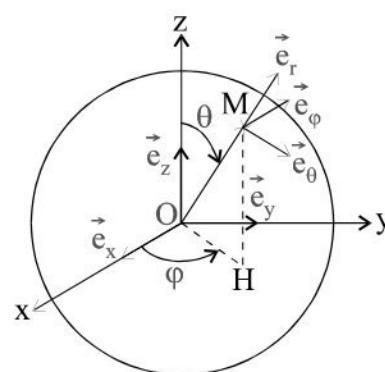
1.2. Exprimer, en fonction de Q et de r , $\vec{E}(M)$ en tout point M à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère. Est-il continu à la traversée de la sphère ? Ce résultat est-il général ?

1.3. Représenter $E(r)$.

1.4. Rappeler l'équation différentielle vérifiée par le potentiel $U(r)$ en tout point extérieur à la sphère. Préciser les conditions aux limites vérifiées par $U(r)$. En déduire $U(r)$.

1.5. Calculer la capacité de la sphère définie par $C = \frac{Q}{V_0}$.

Application numérique : $R=0,2$ m ; $\epsilon_0=8,85 \cdot 10^{-12}$ F.m⁻¹. Calculer C .

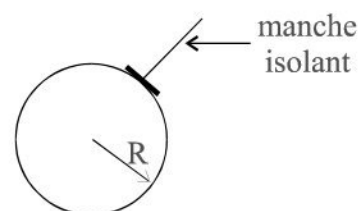


2. On applique sur la sphère une lame conductrice L plane, de contour circulaire de rayon r très petit par rapport à R , mince, non chargée, portée à l'extrémité d'un manche isolant.

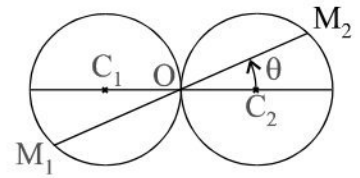
2.1. Déterminer la force f qui s'exerce sur la charge de la lame ainsi placée en fonction de r , R et V_0 . Préciser sa direction et son sens.

2.2. On éloigne ensuite la lame L de la sphère dans une direction normale à celle-ci. Calculer la charge q qu'elle emporte.

Application numérique : $V_0=100$ V, $R=0,2$ m et $r=1,2$ cm ; calculer f et q .



3. Deux sphères conductrices de même rayon R sont en contact extérieur en O ; elles ne portent d'abord aucune charge ; le système qu'elles forment est supposé éloigné de tout autre conducteur. Un générateur extérieur impose le potentiel V_0 du système. On admet l'approximation suivant laquelle, en chaque point M_1 ou M_2 , défini par l'angle θ que fait OM_2 avec OC_2 , la densité surfacique de charge correspondant à l'équilibre électrostatique ainsi obtenu, est de la forme $\sigma = k \cos \theta$, k étant indépendant de l'angle θ .



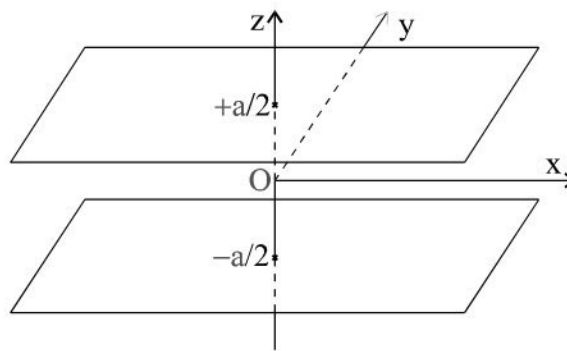
- 3.1. Calculer en fonction des données V_0 et R , la charge Q de chacune des sphères, en exprimant pour calculer k , que le potentiel au point de contact O des deux sphères a la valeur V_0 imposée par le générateur.

- 3.2. Déterminer, en module, direction et sens, la force électrostatique $\vec{F}$ qui s'exerce sur chacune des sphères en contact.

Application numérique : $V_0 = 100$ V, $R = 6$ cm ; calculer Q et $F = \|\vec{F}\|$.

II. ONDE ELECTROMAGNETIQUE GUIDEE

On s'intéresse à la propagation suivant Ox d'une onde électromagnétique dans le vide, entre deux plans conducteurs (supposés parfaits), d'équations $z = -a/2$ et $z = a/2$ (cf. figure ci-dessous).



Nous supposons que $\vec{E}$ est de la forme : $\vec{E} = E_0 \cos \alpha z \exp i(\omega t - kx) \vec{e}_y$, où k et ω sont des constantes.

1. Relation de dispersion, calculs préliminaires

- 1.1. Rappeler les relations de passage vérifiées par le champ électromagnétique au voisinage d'un conducteur parfait. En déduire les valeurs possibles que peut prendre α .

Dans toute la suite du problème on prendra pour α la plus petite valeur positive possible.

- 1.2. Ecrire les équations de Maxwell dans l'espace vide entre les deux conducteurs.

- 1.3. En déduire l'équation de propagation du champ électrique $\vec{E}$.

- 1.4. Déterminer la relation de dispersion reliant k , ω et a .

La pulsation ω correspond à une longueur d'onde dans le vide $\lambda = 3$ cm. En supposant que $a = 2,5$ cm, montrer que l'onde peut se propager entre les deux plans.

- 1.5. Définir par une phrase et calculer la vitesse de phase v_ϕ . Commenter.

1.6. Calculer la vitesse de groupe : $v_g = \frac{d\omega}{dk}$. Commenter.

1.7. Calculer $\vec{B}$.

1.8. L'onde électromagnétique est-elle plane ? Transversale ? Justifier.

1.9. Décrire l'onde dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation.

1.10. Reprendre les questions 1.5. à 1.8. en supposant que a tend vers l'infini. Commenter.

1.11. Calculer les densités superficielles de charges et de courants sur les deux plans.

2. Etude énergétique

2.1. Calculer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$.

2.2. Calculer les valeurs moyennes temporelles des composantes de $\vec{\Pi}$. Interpréter le résultat.

2.3. Calculer la puissance électromagnétique moyenne $I = \langle P_{em} \rangle$ traversant l'unité de surface perpendiculaire à la direction de propagation.

2.4. Calculer la densité d'énergie électromagnétique u_{em} et sa valeur moyenne temporelle $\langle u_{em} \rangle$.

2.5. En déduire la vitesse de propagation de l'énergie électromagnétique : $v_e = \frac{\langle \vec{\Pi} \cdot \vec{e}_x \rangle}{\langle u_{em} \rangle}$. Comparer à v_g .

2.6. Vérifier que les expressions de $\vec{\Pi}$ et u_{em} trouvées précédemment sont compatibles avec l'équation locale de conservation de l'énergie électromagnétique.

3. Superposition de deux ondes planes

3.1. Montrer que le champ $\vec{E}$ peut se décomposer en deux ondes planes représentées par $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$, de

$$\text{vecteurs d'onde respectifs } \vec{k}_1 = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ +\pi/a \end{pmatrix} \text{ et } \vec{k}_2 = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ -\pi/a \end{pmatrix}.$$

Donner les directions de propagation correspondantes.

3.2. Retrouver par un raisonnement simple l'expression de la vitesse de groupe v_g .