Royaume du Maroc

Ministre de l'Éducation Nationale, de la Formation Professionnelle,
de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Département de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

ENCGT
المدرسة الوطنية للتجارة والتسيير
ECOLE NATIONALE DE COMMERCE ET DE GESTION
ENCG TANGER
Ecole Nationale de Commerce et de Gestion

Présidence du CNAEM 2021
École Nationale de Commerce et de Gestion de Tanger
Université Abdelmalek Essaâdi

CONCOURS NATIONAL D'ACCÈS AUX ÉCOLES DE MANAGEMENT

Édition 2021

Épreuve de Mathématiques et informatique

Filières : ECS

Durée : 4 heures

Cette épreuve comporte **4 pages** au format A4, en plus de cette page de garde.
L'usage de tout document et de tout appareil électronique, y compris la calculatrice, est strictement **interdit**.

Scanné avec CamScanner

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2532 - Wadifa Info - page 1/6

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière ECS, comporte 4 pages.
L'usage de tout appareil électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet de cette épreuve est composé d'un exercice et de deux problèmes indépendants entre eux.

Exercice

Un client fréquente deux fournisseurs d'accès à internet notés F_1 et F_2. Le système de payement qui lui est proposé par chacun des fournisseurs est comme suit :

- ☐ Chez le fournisseur F_1, le client paye 2dh la première demi-heure puis 1dh la demi-heure suivante si elle est entamée puis 3dh par heure supplémentaire entamée.
- ☐ Chez le fournisseur F_2, le client paye un forfait de x dh par heure entamée (x étant une constante réelle > 0).

Par exemple :

- ✓ Pour une session de 30mn, il payera 2dh chez le fournisseur F_1 et x dh chez F_2.
- ✓ Pour une session de 35mn, il payera $3 = (2+1)$dh chez le fournisseur F_1 et x dh chez F_2.
- ✓ Pour une session de 1h35mn, il payera $6 = (2+1+3)$dh chez le fournisseur F_1 et $2x$ dh chez F_2.

On suppose que la durée T, exprimée en heures, passée par le client durant sa connexion lors d'une session unique, est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

On note X_1 (resp. X_2) la variable aléatoire égale au coût de la session chez le fournisseur F_1 (resp. F_2).

1. Étude de la variable X_1

1.1. Justifier que la variable aléatoire X_1 prend ses valeurs dans l'ensemble $\{2\} \cup \{3k\ ;\ k \in \mathbb{N}^*\}$.

1.2. Montrer que $P(X_1 = 2) = 1 - e^{-\lambda/2}$ et $P(X_1 = 3) = e^{-\lambda/2} - e^{-\lambda}$.

1.3. Montrer que, pour tout $k \geqslant 2$, $P(X_1 = 3k) = e^{-\lambda(k-1)}(1 - e^{-\lambda})$

1.4. Montrer que la variable X_1 admet une espérance donnée par $E(X_1) = e^{-\lambda/2} - 1 + \dfrac{3}{1 - e^{-\lambda}}$.

2. Étude de la variable X_2

2.1. Justifier que la variable aléatoire X_2 prend ses valeurs dans l'ensemble $\{kx\ ;\ k \in \mathbb{N}^*\}$.

2.2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X_2 = kx) = P(k-1 < T \leqslant k)$.

2.3. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X_2 = kx) = e^{-\lambda(k-1)}(1 - e^{-\lambda})$.

2.4. Quelle est la loi de la variable aléatoire $\frac{1}{x}X_2$? En déduire que la variable X_2 admet une espérance et donner la valeur de $E(X_2)$.

3. Dans cette question, on suppose que $\lambda = 2\ln 3$.

3.1. Calculer la valeur de $E(X_1) - E(X_2)$.

3.2. Quel forfait horaire maximum, exprimé en dirhams et centimes de dirhams, doit proposer le fournisseur F_2 à ses clients pour concurrencer le fournisseur F_1 ?

4. On s'intéresse ici au temps de connexion pour n clients, avec $n \geqslant 2$, dont on suppose les temps respectifs de connexion (notés $T_1, \ldots, T_n$) mutuellement indépendants et suivant tous la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On note S_n la variable aléatoire définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} T_k$.

4.1. Déterminer la loi de S_n et en préciser une densité.

Scanné avec CamScanner
wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو
Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2532 - Wadifa Info - page 2/6

4.2. Montrer que la variable aléatoire $\frac{1}{S_n}$ admet une espérance et la calculer.

4.3. En déduire en fonction de la variable $\frac{1}{S_n}$ un estimateur sans biais du paramètre λ.

Problème 1

Étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2
Application à l'étude d'une suite de variables aléatoires

Dans ce problème, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels et $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des suites réelles. On note Σ la partie de E formée des suites réelles $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence linéaire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

1ère Partie
Étude de la structure de l'ensemble Σ

1.1. Montrer que Σ est un sous-espace vectoriel de E.

1.2. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \Sigma & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (u_k)_{k\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels réels.

1.3. En déduire la dimension de l'espace vectoriel réel Σ.

1.4. Soit $r \in \mathbb{R}^*$; on considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = r^n.$$

Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma$ si, et seulement si, $r^2 - r - 1 = 0$.

1.5. Détermination de Σ

On note r_1 et r_2 les racines du polynôme $X^2 - X - 1$, avec $r_1 > 1$.

1.5.1. Préciser les valeurs de r_1 et r_2.

1.5.2. Montrer que les suites $(r_1^k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^k)_{k\in\mathbb{N}}$ forment une base de Σ.

1.5.3. En déduire que $\Sigma = \left\{(\alpha r_1^k + \beta r_2^k)_{k\in\mathbb{N}} \ ; \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

1.6. On note $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = 1$ et la relation $\gamma_{n+2} = \gamma_{n+1} + \gamma_n$, $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma$ et en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \gamma_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(r_1^n + \frac{(-1)^{n+1}}{r_1^n}\right).$$

1.7. Écrire un code Scilab prenant en entrée l'entier naturel $n \geqslant 2$ et retournant γ_n.

2ème Partie
Application à l'étude d'une suite de variables aléatoires

Dans cette partie, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de variables aléatoires, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que :

- ✓ *X_0 et X_1 sont* indépendantes *et suivent chacune une loi de* Poisson *de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$;*
- ✓ *pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+2} = X_{n+1} + X_n$.*

Scanné avec CamScanner
wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو
Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2532 - Wadifa Info - page 3/6

2.1. Calculer l'espérance $E(X_0)$ de la variable aléatoire X_0.

2.2. Calculer la variance $V(X_1)$ de la variable aléatoire X_1.

2.3. Montrer que la variable aléatoire X_2 suit une loi de POISSON dont on déterminera le paramètre.

2.4. Étude de l'indépendance des variables aléatoires X_1 et X_2

2.4.1. Justifier que $X_2 \geqslant X_1$ puis donner la probabilité de l'événement

$$A = \{w \in \Omega \,;\; X_1(w) = 1 \text{ et } X_2(w) = 0\}.$$

2.4.2. Montrer que les deux variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

2.5. Expression de X_n en fonction de X_0 et X_1 pour $n \in \mathbb{N}^*$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n = \gamma_{n-1}X_0 + \gamma_n X_1,$$

où $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie à la question **1.6.** de la première partie.
On pourra raisonner par récurrence double.

2.6. Éspérance et variance de la variable aléatoire X_n pour $n \in \mathbb{N}$

2.6.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que la variable aléatoire X_n admet une espérance, notée $E(X_n)$, et la calculer en fonction de λ, μ et de termes de la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.6.2. Montrer que $E(X_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda + \mu r_1}{\sqrt{5}}\, r_1^{n-1}$.

2.6.3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que la variable aléatoire X_n admet une variance, notée $V(X_n)$, et la calculer en fonction de λ, μ et de termes de la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.7. Soient n et m deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.

2.7.1. Calculer, en fonction de λ, μ et de termes de la suite $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$, la covariance $\mathrm{Cov}(X_n, X_m)$ des deux variables aléatoires X_n et X_m.

2.7.2. Que peut-on alors en conclure au sujet des variables aléatoires X_n et X_m ?

2.8. Soient n et m deux entiers naturels. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le couple (n, m) pour que les variables aléatoires X_n et X_m soient indépendantes.

Problème 2

Réduction d'une matrice symétrique réelle
Application à la recherche d'un extrémum local

Dans ce problème, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 3 et I_3 la matrice identité d'ordre 3. Si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, ${}^tM$ désigne la matrice transposée de M et $\mathrm{Tr}(M)$ sa trace ; on rappelle que ${}^t({}^tM) = M$.

1ère Partie
Réduction d'une matrice symétrique réelle

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$; on note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associées à A et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On rappelle que $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$.

1.1. Calculer le rang de la matrice A.

1.2. Préciser la dimension du noyau $\mathrm{Ker}\, u$ de u et en déduire que 0 est valeur propre de A.

1.3. Justifier que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1.4. Préciser l'ordre de multiplicité da la valeur propre 0 de A.

1.5. On note $\lambda < \mu$ les valeurs propres non nulles de A.

1.5.1. Calculer $\lambda + \mu$.

Scanné avec CamScanner
wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو
Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2532 - Wadifa Info - page 4/6

1.5.2. Calculer la trace de la matrice A^2 et montrer qu'elle vaut $\lambda^2 + \mu^2$.

1.5.3. Déduire de ce qui précède que $\lambda = 4$ et $\mu = 6$.

1.6. Déterminer les sous-espaces propres de l'endomorphisme u.

1.7. On note $e'_1 = -e_1 + e_2 + 2e_3$, $e'_2 = e_1 + e_2$ et $e'_3 = e_1 - e_2 + e_3$.

1.7.1. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

1.7.2. Écrire la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$.

1.8. On pose $P = \begin{pmatrix} -a & b & c \\ a & b & -c \\ 2a & 0 & c \end{pmatrix}$ où a, b et c sont des réels non nuls.

1.8.1. Montrer que la matrice P est inversible.

1.8.2. Déterminer les triplets (a, b, c), de réels non nuls, pour lesquels ${}^tPP = I_3$.

1.9. Dans cette question, on choisit un triplet (a, b, c) pour lequel la matrice P vérifie ${}^tPP = I_3$. Justifier sans faire de calcul que $A' = {}^tPAP$.

2ème Partie
Application à la recherche d'un extrémum local

On désigne par f la fonction numérique de deux variables réelles définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = 4x^2 + 4xy + 4y^2 + 2y^4 - 4y^3.$$

2.1. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2.2. Calculer les dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ de la fonction f.

2.3. Montrer qu'il existe un unique couple (x, y) de réels tel que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ et le déterminer.

2.4. Justifier que si f présente un extremum local en un point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$ alors $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

2.5. Justifier que si f présente un extremum local en un point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$ alors $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

2.6. Dans cette question, on choisit un triplet (a, b, c) pour lequel la matrice P, définie à la question **1.8.** ci-dessus, vérifie ${}^tPP = I_3$. On rappelle que l'on a $A' = {}^tPAP$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; on note u, v et w les réels tels que $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} x \\ y^2 \\ y \end{pmatrix}$.

2.6.1. Montrer que $\begin{pmatrix} x & y^2 & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y^2 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} A' \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$.

2.6.2. En calculant les produits matriciels ci-dessus, trouver une relation entre $f(x, y)$ et $4v^2 + 6w^2$.

2.6.3. Conclure que f présente un minimum local en $(0, 0)$.

2.7. Retrouver le résultat de la question **2.6.3.** précédente en utilisant la matrice hessienne de f en $(0, 0)$.

Fin de l'épreuve

Scanné avec CamScanner
wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو
Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2532 - Wadifa Info - page 5/6

Wadifa Info

www.wadifa-info.com

Le sujet suivant à préparer — **النموذج التالي للتحضير**

نموذج مباراة ولوج المدارس الوطنية للتجارة والتسيير ENCG 2009 - اختبار الأهلية للتكوين في

Modèle concours d'accès – Réseau des Écoles Nationales de Commerce et de Gestion (ENCG) 2009 – Test d'Admissibilité à

www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/1185

Chaîne WhatsApp — **قناة واتساب**

المباريات الجديدة والنتائج كل يوم

Nouveaux concours et résultats chaque jour

wadifa-info.com/wa

Chaîne YouTube — **قناة يوتيوب**

امتحانات تجريبية بالتصحيح، بالدارجة

Examens blancs corrigés, expliqués en darija

youtube.com/@wadifainfo

Envoyer à un ami — **أرسل النموذج لصديق**

شارك هذا النموذج على واتساب مع من يحضّر معك

Partagez ce sujet sur WhatsApp

wa.me