

Royaume du Maroc



Ministre de l'Éducation Nationale, de la Formation Professionnelle,  
de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Département de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Présidence du CNAEM 2021  
École Nationale de Commerce et de Gestion de Tanger  
Université Abdelmalek Essaâdi

# CONCOURS NATIONAL D'ACCÈS AUX ÉCOLES DE MANAGEMENT *Édition 2021*

Épreuve de Mathématiques et informatique

Filières : ECS

Durée : 4 heures

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde.  
L'usage de tout document et de tout appareil électronique, y compris la calculatrice, est strictement **interdit**.

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière ECS, comporte 4 pages.

L'usage de tout appareil électronique, y compris la calculatrice, est interdit

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet de cette épreuve est composé d'un exercice et de deux problèmes indépendants entre eux.

## Exercice

Un client fréquente deux fournisseurs d'accès à internet notés  $F_1$  et  $F_2$ . Le système de paiement qui lui est proposé par chacun des fournisseurs est comme suit :

- ☐ Chez le fournisseur  $F_1$ , le client paye 2dh la première demi-heure puis 1dh la demi-heure suivante si elle est entamée puis 3dh par heure supplémentaire entamée.
- ☐ Chez le fournisseur  $F_2$ , le client paye un forfait de  $x$  dh par heure entamée ( $x$  étant une constante réelle  $> 0$ ).

Par exemple :

- ✓ Pour une session de 30mn, il payera 2dh chez le fournisseur  $F_1$  et  $x$  dh chez  $F_2$ .
- ✓ Pour une session de 35mn, il payera  $3 = (2 + 1)$ dh chez le fournisseur  $F_1$  et  $x$  dh chez  $F_2$ .
- ✓ Pour une session de 1h35mn, il payera  $6 = (2 + 1 + 3)$ dh chez le fournisseur  $F_1$  et  $2x$  dh chez  $F_2$ .

On suppose que la durée  $T$ , exprimée en heures, passée par le client durant sa connexion lors d'une session unique, est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ .

On note  $X_1$  (resp.  $X_2$ ) la variable aléatoire égale au coût de la session chez le fournisseur  $F_1$  (resp.  $F_2$ ).

### 1. Étude de la variable $X_1$

1.1. Justifier que la variable aléatoire  $X_1$  prend ses valeurs dans l'ensemble  $\{2\} \cup \{3k ; k \in \mathbb{N}^*\}$ .

1.2. Montrer que  $P(X_1 = 2) = 1 - e^{-\lambda/2}$  et  $P(X_1 = 3) = e^{-\lambda/2} - e^{-\lambda}$ .

1.3. Montrer que, pour tout  $k \geq 2$ ,  $P(X_1 = 3k) = e^{-\lambda(k-1)}(1 - e^{-\lambda})$

1.4. Montrer que la variable  $X_1$  admet une espérance donnée par  $E(X_1) = e^{-\lambda/2} - 1 + \frac{3}{1 - e^{-\lambda}}$ .

### 2. Étude de la variable $X_2$

2.1. Justifier que la variable aléatoire  $X_2$  prend ses valeurs dans l'ensemble  $\{kx ; k \in \mathbb{N}^*\}$ .

2.2. Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $P(X_2 = kx) = P(k-1 < T \leq k)$ .

2.3. En déduire que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $P(X_2 = kx) = e^{-\lambda(k-1)}(1 - e^{-\lambda})$ .

2.4. Quelle est la loi de la variable aléatoire  $\frac{1}{x}X_2$  ? En déduire que la variable  $X_2$  admet une espérance et donner la valeur de  $E(X_2)$ .

3. Dans cette question, on suppose que  $\lambda = 2 \ln 3$ .

3.1. Calculer la valeur de  $E(X_1) - E(X_2)$ .

3.2. Quel forfait horaire maximum, exprimé en dirhams et centimes de dirhams, doit proposer le fournisseur  $F_2$  à ses clients pour concurrencer le fournisseur  $F_1$  ?

4. On s'intéresse ici au temps de connexion pour  $n$  clients, avec  $n \geq 2$ , dont on suppose les temps respectifs de connexion (notés  $T_1, \dots, T_n$ ) mutuellement indépendants et suivant tous la loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ . On note  $S_n$  la variable aléatoire définie par  $S_n = \sum_{k=1}^n T_k$ .

4.1. Déterminer la loi de  $S_n$  et en préciser une densité.

- 4.2. Montrer que la variable aléatoire  $\frac{1}{S_n}$  admet une espérance et la calculer.
- 4.3. En déduire en fonction de la variable  $\frac{1}{S_n}$  un estimateur sans biais du paramètre  $\lambda$ .

### Problème 1

#### Étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 Application à l'étude d'une suite de variables aléatoires

Dans ce problème,  $\mathbb{R}$  désigne l'ensemble des nombres réels et  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des suites réelles. On note  $\Sigma$  la partie de  $E$  formée des suites réelles  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  vérifiant la relation de récurrence linéaire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

#### 1<sup>ère</sup> Partie

##### Étude de la structure de l'ensemble $\Sigma$

- 1.1. Montrer que  $\Sigma$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
- 1.2. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \Sigma &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u_k)_{k \in \mathbb{N}} &\longmapsto (u_0, u_1) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels réels.

- 1.3. En déduire la dimension de l'espace vectoriel réel  $\Sigma$ .
- 1.4. Soit  $r \in \mathbb{R}^*$  ; on considère la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = r^n.$$

Montrer que  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Sigma$  si, et seulement si,  $r^2 - r - 1 = 0$ .

#### 1.5. Détermination de $\Sigma$

On note  $r_1$  et  $r_2$  les racines du polynôme  $X^2 - X - 1$ , avec  $r_1 > 1$ .

1.5.1. Préciser les valeurs de  $r_1$  et  $r_2$ .

1.5.2. Montrer que les suites  $(r_1^k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(r_2^k)_{k \in \mathbb{N}}$  forment une base de  $\Sigma$ .

1.5.3. En déduire que  $\Sigma = \left\{ (\alpha r_1^k + \beta r_2^k)_{k \in \mathbb{N}} ; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ .

- 1.6. On note  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite réelle définie par  $\gamma_0 = 0$ ,  $\gamma_1 = 1$  et la relation  $\gamma_{n+2} = \gamma_{n+1} + \gamma_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Vérifier que  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Sigma$  et en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \gamma_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( r_1^n - \frac{(-1)^{n+1}}{r_1^n} \right).$$

- 1.7. Écrire un code Scilab prenant en entrée l'entier naturel  $n \geq 2$  et retournant  $\gamma_n$ .

#### 2<sup>ème</sup> Partie

##### Application à l'étude d'une suite de variables aléatoires

Dans cette partie,  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  désigne une suite de variables aléatoires, définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , telles que :

- ✓  $X_0$  et  $X_1$  sont indépendantes et suivent chacune une loi de POISSON de paramètres respectifs  $\lambda > 0$  et  $\mu > 0$  ;
- ✓ pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_{n+2} = X_{n+1} + X_n$ .

- 2.1. Calculer l'espérance  $E(X_0)$  de la variable aléatoire  $X_0$ .
- 2.2. Calculer la variance  $V(X_1)$  de la variable aléatoire  $X_1$ .
- 2.3. Montrer que la variable aléatoire  $X_2$  suit une loi de POISSON dont on déterminera le paramètre.
- 2.4. Étude de l'indépendance des variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$ 
  - 2.4.1. Justifier que  $X_2 \geq X_1$  puis donner la probabilité de l'événement

$$A = \{w \in \Omega ; X_1(w) = 1 \text{ et } X_2(w) = 0\}.$$

- 2.4.2. Montrer que les deux variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  ne sont pas indépendantes.

- 2.5. Expression de  $X_n$  en fonction de  $X_0$  et  $X_1$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n = \gamma_{n-1}X_0 + \gamma_n X_1,$$

où  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite définie à la question 1.6. de la première partie.

On pourra raisonner par récurrence double.

- 2.6. Espérance et variance de la variable aléatoire  $X_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$

- 2.6.1. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Justifier que la variable aléatoire  $X_n$  admet une espérance, notée  $E(X_n)$ , et la calculer en fonction de  $\lambda$ ,  $\mu$  et de termes de la suite  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

- 2.6.2. Montrer que  $E(X_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda + \mu r_1}{\sqrt{5}} r_1^{n-1}$ .

- 2.6.3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Justifier que la variable aléatoire  $X_n$  admet une variance, notée  $V(X_n)$ , et la calculer en fonction de  $\lambda$ ,  $\mu$  et de termes de la suite  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

- 2.7. Soient  $n$  et  $m$  deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.

- 2.7.1. Calculer, en fonction de  $\lambda$ ,  $\mu$  et de termes de la suite  $(\gamma_p)_{p \in \mathbb{N}}$ , la covariance  $\text{Cov}(X_n, X_m)$  des deux variables aléatoires  $X_n$  et  $X_m$ .

- 2.7.2. Que peut-on alors en conclure au sujet des variables aléatoires  $X_n$  et  $X_m$  ?

- 2.8. Soient  $n$  et  $m$  deux entiers naturels. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le couple  $(n, m)$  pour que les variables aléatoires  $X_n$  et  $X_m$  soient indépendantes.

## Problème 2

### Réduction d'une matrice symétrique réelle Application à la recherche d'un extrémum local

Dans ce problème,  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  désigne l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 3 et  $I_3$  la matrice identité d'ordre 3. Si  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ,  ${}^tM$  désigne la matrice transposée de  $M$  et  $\text{Tr}(M)$  sa trace; on rappelle que  ${}^t({}^tM) = M$ .

#### 1<sup>ère</sup> Partie

#### Réduction d'une matrice symétrique réelle

Soit  $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ; on note  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associée à  $A$

et  $B = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . On rappelle que  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$  et  $e_3 = (0, 0, 1)$ .

- 1.1. Calculer le rang de la matrice  $A$ .
- 1.2. Préciser la dimension du noyau  $\text{Ker } u$  de  $u$  et en déduire que 0 est valeur propre de  $A$ .
- 1.3. Justifier que la matrice  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .
- 1.4. Préciser l'ordre de multiplicité de la valeur propre 0 de  $A$ .
- 1.5. On note  $\lambda < \mu$  les valeurs propres non nulles de  $A$ .
  - 1.5.1. Calculer  $\lambda + \mu$ .

- 1.5.2. Calculer la trace de la matrice  $A^2$  et montrer qu'elle vaut  $\lambda^2 + \mu^2$ .
- 1.5.3. Dédire de ce qui précède que  $\lambda = 4$  et  $\mu = 6$ .
- 1.6. Déterminer les sous-espaces propres de l'endomorphisme  $u$ .
- 1.7. On note  $e'_1 = -e_1 + e_2 + 2e_3$ ,  $e'_2 = e_1 + e_2$  et  $e'_3 = e_1 - e_2 + e_3$ .
- 1.7.1. Montrer que la famille  $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
- 1.7.2. Écrire la matrice  $A'$  de  $f$  dans la base  $B'$ .
- 1.8. On pose  $P = \begin{pmatrix} -a & b & c \\ a & b & -c \\ 2a & 0 & c \end{pmatrix}$  où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des réels non nuls.
- 1.8.1. Montrer que la matrice  $P$  est inversible.
- 1.8.2. Déterminer les triplets  $(a, b, c)$ , de réels non nuls, pour lesquels  ${}^tPP = I_3$ .
- 1.9. Dans cette question, on choisit un triplet  $(a, b, c)$  pour lequel la matrice  $P$  vérifie  ${}^tPP = I_3$ . Justifier sans faire de calcul que  $A' = {}^tPAP$ .

## 2<sup>ème</sup> Partie

### Application à la recherche d'un extrémum local

On désigne par  $f$  la fonction numérique de deux variables réelles définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = 4x^2 + 4xy + 4y^2 + 2y^4 - 4y^3.$$

- 2.1. Justifier que la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
- 2.2. Calculer les dérivées partielles premières  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  de la fonction  $f$ .
- 2.3. Montrer qu'il existe un unique couple  $(x, y)$  de réels tel que  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$  et le déterminer.
- 2.4. Justifier que si  $f$  présente un extrémum local en un point  $(x_0, y_0)$  de  $\mathbb{R}^2$  alors  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ .
- 2.5. Justifier que si  $f$  présente un extrémum local en un point  $(x_0, y_0)$  de  $\mathbb{R}^2$  alors  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ .
- 2.6. Dans cette question, on choisit un triplet  $(a, b, c)$  pour lequel la matrice  $P$ , définie à la question 1.8. ci-dessus, vérifie  ${}^tPP = I_3$ . On rappelle que l'on a  $A' = {}^tPAP$ .

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ; on note  $u$ ,  $v$  et  $w$  les réels tels que  $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} x \\ y^2 \\ y \end{pmatrix}$ .

- 2.6.1. Montrer que  $(x \ y^2 \ y) A \begin{pmatrix} x \\ y^2 \\ y \end{pmatrix} = (u \ v \ w) A' \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ .
- 2.6.2. En calculant les produits matriciels ci-dessus, trouver une relation entre  $f(x, y)$  et  $4v^2 + 6w^2$ .
- 2.6.3. Conclure que  $f$  présente un minimum local en  $(0, 0)$ .
- 2.7. Retrouver le résultat de la question 2.6.3. précédente en utilisant la matrice hessienne de  $f$  en  $(0, 0)$ .

FIN DE L'ÉPREUVE