ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'éducation nationale
de l'enseignement supérieur,
de la formation des cadres
et de la recherche scientifique

Présidence
du Concours National Commun aux
Ecoles de Management (CNCM)
(ENCG / ESI) 2012

# CONCOURS NATIONAL COMMUN

d'Admission aux

# Grandes Écoles de Management (CNCM) (ENCG / ESI)

Session 2012

## ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée **4 heures**

## FILIÈRES : ECT

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde.
L'usage de la calculatrice est *interdit*

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2526 - Wadifa Info - page 1/6

*Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les* références *des questions abordées.*
*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

**Remarques générales :**
L'épreuve se compose de quatres exercices indépendants.

# EXERCICE 1

✧✧✧

On considère les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-2&-2&3\\-2&-3&4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}, T=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix} \text{ et } P=\begin{pmatrix}1&1&-2\\2&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

**1.** Montrer que la matrice P est inversible et calculer la matrice inverse $P^{-1}$.

**2.** Calculer $B^2$ puis $B^3$. En déduire $B^k$ si $k$ est un entier supérieur ou égal à 3.

**3.** Calculer $I+B$. Déterminer, en utilisant la formule du binôme de Newton, l'expression de $T^n$ en fonction de $n$, B et $B^2$.
En déduire l'expression de $T^n$ en fonction de $n$ uniquement.

**4.** Montrer que $P^{-1}.T.P = A$

**5.** Donner l'expression de $A^n$ en fonction de $n$, P, $P^{-1}$ et $T^n$.

**6.** Pour tout entier naturel $n$, calculer les coefficients de la matrice $A^n$ en fonction de $n$ uniquement.

**7** On considère trois suites $(a_n)$ $(b_n)$ et $(c_n)$ définies par des conditions initiales $a_0$, $b_0$, $c_0$ et par les relations

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \begin{cases} a_{n+1}=a_n-b_n+c_n\\ b_{n+1}=-2a_n-2b_n+3c_n\\ c_{n+1}=-2a_n-3b_n+4c_n\end{cases}$$

On introduit la matrice $X_n=\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}$

**8.** Reconnaître, pour tout entier naturel $n$, le produit $AX_n$.
En déduire l'expression de $X_n$ en fonction des matrices $A^n$, $X_0$ et de l'entier naturel $n$.



wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو
Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2526 - Wadifa Info - page 2/6

**9.** En déduire l'expression des suites $a_n$, $b_n$ et $c_n$ en fonction de $n$ uniquement dans le cas où $a_0 = 2$, $b_0 = -3$, et $c_0 = 4$.

# EXERCICE 2

✧✧✧

On pose pour tout entier naturel $n$ :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \dots$$

On se propose d'étudier la limite L de $u_n$ lorsque $n \to +\infty$.

Pour tout entier naturel $n$ on pose :

$$f_p(t) = \frac{t^{\frac{1}{2}+p}}{1+t}) = \frac{t^p\sqrt{t}}{1+t} \text{ si } 0 < t \leq 1,\ f_p(0) = 0$$

$$et\ I_p = \int_0^1 f_p(t)dt.$$

**1.** Montrer que pour tout entier naturel $p$, la fonction $f_p$ est continue sur $[0,1]$ et que l'intégrale $I_p$ existe.

**2.** Montrer que pour tout $t$ de $[0,1]$ et pour tout entier $n$ :

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k + (-1)^{n+1}\frac{t^{n+1}}{1+t}$$

**3.** Déduire de ce qui précède que l'on a pour tout entier $n$ :

$$\int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{2}}}{1+t}dt = u_n + R_n \text{ où } R_n = (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+\frac{1}{2}+1}}{1+t}dt$$

**4.** Démontrer que pour tout entier $n$ :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+\frac{1}{2}+1}}{1+t}dt \leq \frac{1}{n+2}$$

**5.** Conclure que l'on $a$ :

$$L = \int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{2}}}{1+t}dt$$



wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2526 - Wadifa Info - page 3/6

# EXERCICE 3

✧✧✧

Une agence Telecom propose à ses clients les deux formules d'abonnemnt suivantes :
♣ La formule abonnement Classique notée **C**. Le forfait comprend $5h$ de communication et une connexion 3G avec un engagement de douze mois.
♣ La formule abonnement Fidélité notée **F**. Le forfait comprend un téléphone dernier modèle à moitié prix, $5h$ de communication et une connexion 3G avec un engagement de vingt quatres mois.
**30**% des clients de l'agence choisissent la formule **C** et **70**% la formule **F**.
Parmi les clients ayant choisi la formule **C**, **80**% choisissent de payer leurs factures par virement automatique et **20**% préfèrent payer leurs factures en espèces à l'agence.
Parmi ceux ayant choisi la formule **F**, **40**% payent leurs factures par virement automatique et **60**% à l'agence.

**1.** Un client se présente à l'agence.

**1.*a.*** Calculer la probabilité qu'il choisisse un payement à l'agence en formule **F**.

**1.*b.*** Calculer la probabilité qu'il choisisse un payement à l'agence.

**1.*c.*** Il demande un payement à l'agence. Calculer la probabilité qu'il choisisse la formule **F**.

**2.** Deux clients se présentent à l'agence.

On note X le nombre de ces deux clients qui choisissent la formule **F** et Y le nombre des deux clients qui choisissent un **payement à l'agence.**

**2.*a.*** Pour tout $i$ et tout $j \in \{0,1,2\}$ présenter la décomposition des évènements $(X = i \cap Y = j)$, dans un tableau à double entrée.
(on pourra coder $CF_1$ plutôt que $C_1 \cap F_1$)

**2.*b.*** Donner la loi du couple (X, Y), c'est à dire,donner les probabilité $p(X = i \cap Y = j)$ pour tout $i$ et tout $j \in \{0,1,2\}$. On pourra recopier et remplir le tableau à double entrée suivant :

| $i \backslash j$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | | | |
| 1 | | | |
| 2 | | | |

**2.*c.*** Calculer la probabilité que l'un au moins de ces deux clients choisisse un payement à l'agence en formule **F**.



wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو
Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2526 - Wadifa Info - page 4/6

# EXERCICE 4

✧✧✧

Dans cet exercice, $n$ désigne un entier naturel non nul.

**1.** Soit $f_n$ la fonction définie par : $f_n(x) = \begin{cases} nx^{n-1} & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Montrer que $f_n$ est une densité de probabilité.

**2.** On considère une variable aléatoire $X_n$ réelle dont une densité de probabilité est $f_n$. On dit alors que $X_n$ suit une loi monôme d'ordre $n$.

**2.*a.*** Reconnaître la loi de $X_1$.

**2.*b.*** Dans le cas où $n$ est supérieur ou égal à 2, déterminer la fonction de répartition $F_n$ de $X_n$, ainsi que son espérance $E(X_n)$ et sa variance $V(X_n)$.

**3.** On considère deux variables aléatoires $Y_n$ et $Z_n$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, suivant la loi monôme d'ordre $n$ $(n \geqslant 2)$ et indépendantes, c'est-à-dire qu'elles vérifient en particulier l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(Y_n \leqslant x \cap Z_n \leqslant x) = P(Y_n \leqslant x)\,P(Z_n \leqslant x)$$

On pose $M_n = \sup(Y_n, Z_n)$ et on admet que $M_n$ est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

**3.*a.*** Pour tout réel $x$, écrire, en justifiant la réponse, l'événement $(M_n \leqslant x)$ à l'aide des événements $(Y_n \leqslant x)$ et $(Z_n \leqslant x)$.

**3.*b.*** En déduire une densité de $M_n$. Vérifier que $M_n$ suit une loi monôme dont on donnera l'ordre, puis déterminer sans calcul $E(M_n)$.

**3.*c.*** On pose $T_n = \inf(Y_n, Z_n)$. Exprimer $M_n + T_n$ en fonction de $Y_n$ et $Z_n$, puis en déduire, sans calcul d'intégrale, la valeur de $E(T_n)$.

✧✧✧

FIN DE L ÉPREUVE



wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2526 - Wadifa Info - page 5/6

# Wadifa Info

www.wadifa-info.com

**Le sujet suivant à préparer** — **النموذج التالي للتحضير**

## نموذج مباراة ولوج المدارس الوطنية للتجارة والتسيير ENCG 2009 - اختبار الأهلية للتكوين في

Modèle concours d'accès – Réseau des Écoles Nationales de Commerce et de Gestion (ENCG) 2009 – Test d'Admissibilité à

www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/1185

**Chaîne WhatsApp** — **قناة واتساب**

## المباريات الجديدة والنتائج كل يوم

Nouveaux concours et résultats chaque jour

wadifa-info.com/wa

**Chaîne YouTube** — **قناة يوتيوب**

## امتحانات تجريبية بالتصحيح، بالدارجة

Examens blancs corrigés, expliqués en darija

youtube.com/@wadifainfo

**Envoyer à un ami** — **أرسل النموذج لصديق**

## شارك هذا النموذج على واتساب مع من يحضّر معك

Partagez ce sujet sur WhatsApp

wa.me