المملكة المغربية
وزارة التعليم العالي
والبحث العلمي وتكوين الأطر

Royaume du Maroc
Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche Scientifique et de la Formation des Cadres

PRESIDENCE DU CNAEM 2015

ENCG Settat

CONCOURS NATIONAL D'ACCES AUX ECOLES DE MANAGEMENT

CNAEM 2015

Filière : **ECS**

Epreuve de Mathématiques et Informatique

Durée **4** heures

Notes à lire par le candidat

- *Chaque candidat n'a droit qu'à un seul «CAHIER D'EPREUVE».*
- *Le candidat doit écrire son nom de famille, prénom(s), centre et numéro d'examen dans la partie réservée à ceci en haut de la 1ere page du CAHIER D'EPREUVE, avant de commencer à rédiger, pour valider sa feuille de composition.*
- *L'usage de toutes machines (calculatrice, traductrice, etc.) ou dictionnaire est strictement interdit.*
- *Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Page de garde

Ecole Nationale de Commerce et de Gestion-Settat

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2521 - Wadifa Info - page 1/7

Durée : 4 heures

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Remarques générales:

L'épreuve se compose de deux exercices et deux problèmes indépendants.

★ ★ ★ ★ ★

EXERCICE 1

Soit p un réel de $]0,1[$ et $q = 1-p$. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre p.
Pour tout ω de Ω, on considère le polynôme Q_ω d'indéterminée y, défini par:

$$Q_\omega = (y - X_1(\omega))^2 - (X_2(\omega))^2$$

On désigne par $t_1(\omega)$ et $t_2(\omega)$ les racines réelles de Q_ω. Posons $m(\omega) = \min(t_1(\omega), t_2(\omega))$ et $M(\omega) = \max(t_1(\omega), t_2(\omega))$. Cela définit deux variables aléatoires m et M sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

1. a) Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $E(X_1)$, $V(X_1)$.
   b) Vérifier que pour tout k de $X_1(\Omega)$, $P([X_1 \leq k]) = 1 - q^k$.
   c) Pour tous k_1 et k_2 de $X_1(\Omega)$ tel que $k_1 < k_2$, déterminer $P(k_1 < X_1 \leq k_2)$.
2. a) Vérifier que pour tout ω de Ω, $m(\omega) = X_1(\omega) - X_2(\omega)$ et $M(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega)$.
   b) Déterminer $E(m)$, $V(m)$, $E(M)$ et $V(M)$.
   c) Calculer la covariance des variables aléatoires m et M.
3. a) Etablir la relation $P(X_1 = X_2) = \frac{p}{1+q}$.
   b) Déterminer $P([m = 0] \cap [M = 2])$.
   c) Les variables m et M sont-elles indépendantes? justifier votre réponse.
4. a) Établir que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $P(M = n) = (n-1)p^2q^{n-2}$.
   b) On suppose que $p = \frac{2}{17}$. Quelle est la valeur la plus probable de la plus grande racine des polynômes Q_ω?

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2}{\pi(e^x + e^{-x})}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Dans la suite, on note X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admettant f pour densité.
   a) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
   b) En déduire la valeur de $P\left(\ln \frac{\sqrt{3}}{3} \leq X \leq \ln \sqrt{3}\right)$.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2521 - Wadifa Info - page 2/7

c) Montrer que X admet des moments de tous ordres et calculer son espérance.

3. On pose $Y = e^X$.

a) Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Y.

b) Calculer la valeur de $P(|Y - \frac{2\sqrt{3}}{3}| > \frac{\sqrt{3}}{3})$.

c) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance? justifier votre réponse.

4. On considère une suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes la même loi que Y.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$M_n = \sup(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n).$$

a) Déterminer la fonction de répartition de M_n.

b) Pour $n \geq 1$, on pose $Z_n = \frac{n}{M_n}$. Montrer que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on donnera la loi.

PROBLEME 1

PARTIE 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, posons la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f_n(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ f_n(x) = x^n e^{-x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 f_n(x) = 0$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ est convergente.

2. En déduire que pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(x)e^{-x^2}dx$ est convergente.

Dans tout le problème, on pose $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}dx$.

3. a) Calculer I_1.

b) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n$.

c) Montrer que pour tout entier naturel k, $I_{2k+1} = \frac{k!}{2}$.

d) Montrer que pour tout entier naturel k, $I_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k+1}k!}\sqrt{\pi}$.

PARTIE 2

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, les intégrales $\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t^2}dt$ et $\int_0^{+\infty} t\sin(xt)e^{-t^2}dt$ convergent.
On note $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$C(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t^2}dt \text{ et } S(x) = \int_0^{+\infty} t\sin(xt)e^{-t^2}dt$$

2. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\cos(a+\alpha) - \cos(a) + \alpha\sin a| \leq \frac{\alpha^2}{2}$.

3. a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{h\to 0} \frac{C(x+h)-C(x)}{h} + S(x) = 0$.

b) En déduire que C est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée C'.

4. a) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S(x) = \frac{x}{2}C(x)$.

b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $C(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{-1}{4}x^2}$ et $S(x) = \frac{x\sqrt{\pi}}{4}e^{\frac{-1}{4}x^2}$.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2521 - Wadifa Info - page 3/7

PARTIE 3

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4t^4} e^{-t^2} dt$ converge.
   On définit ainsi l'application h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4t^4} e^{-t^2} dt$.
2. a) Montrer que pour tout $u \in [0, +\infty[$, $0 \leq 1 - u^2 + u^4 - \frac{1}{1+u^2} \leq u^6$.
   b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \int_0^{+\infty} \left(1 - x^2t^2 + x^4t^4\right) e^{-t^2} dt - h(x) \leq (\frac{10395}{128}\sqrt{\pi})x^{12}$.
3. Montrer que h admet un développement limité à l'ordre 11 en 0, et former ce développement limité.
4. a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^{2k}}{t^3+(2k)!} e^{-t^2} dt$ converge.

   On note pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = \int_0^{+\infty} \frac{t^{2k}}{t^3+(2k)!} e^{-t^2} dt$.

   b) i) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_k \leq \frac{I_{2k}}{(2k)!}$.
   ii) En déduire que la série de terme général u_k est convergente.

   c) Plus généralement, étudier la nature de la série $\sum_k u_k x^k$, $x \in \mathbb{R}$.

PARTIE 4

Notons $E_n = R_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inferieur ou égal à n, $n \in \mathbb{N}$.
On défini l'application φ définie de $E_n \times E_n$ par $\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$.

1. Vérifier que φ est un produit scalaire sur E_n.

   Dans la suite, E_n est muni de ce produit scalaire.

2. Posons $F = \{P \in E_1;\ \int_0^{+\infty} P(x)e^{-x^2} dx = 0\}$.
   a) Montrer que F est sous espace vectoriel de E_1 de dimension 1 et déterminer une base (Q_1) de F telle que Q_1 soit unitaire.
   b) Déterminer G le supplémentaire orthogonale à F dans E_1. Soit Q_0 le polynôme de E_1, unitaire tel que $G = vect(Q_0)$.
   d) Posons h le polynôme tel que $h(x) = 1$, déterminer $d(h, F)$ où d est la distance associée au produit scalaire φ.

3. Soient les polynômes suivants:

$$T_0 = 1,\ T_1 = X - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad \text{et} \quad T_2 = X^2 - \frac{\sqrt{\pi}}{\pi - 2}X - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi - 4}{\pi - 2}\right).$$

   a) Vérifier que (T_0, T_1, T_2) est une famille orthogonale.
   b) Soit (u, v) un couple de réels.
   i) Montrer qu'il existe un triplet (a, b, c) de réels (qu'on ne cherche pas à le déterminer maintenant) tel que $X^2 + uX + v = aT_2 + bT_1 + cT_0$.
   ii) En déduire que $\varphi(X^2 + uX + v, X^2 + uX + v) = a^2\varphi(T_2, T_2) + b^2\varphi(T_1, T_1) + c^2\varphi(T_0, T_0)$.
   iii) Etablir que $a = 1$, $b = u + \frac{\sqrt{\pi}}{\pi - 2}$ et $c = v + \frac{u}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2}$.

4. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$, telle que pour tout couple (u, v) de réels on associe l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} (t^2 + ut + v)^2 e^{-t^2} dt.$$

   Montrer que H admet un minimum.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2521 - Wadifa Info - page 4/7

PROBLEME 2

Soit E un espace vectoriel et $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Pour tout réel a, on considère l'endomorphisme f_a de l'espace vectoriel E dont la matrice dans la base β est donnée par

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1-a & 1-a \\ a-2 & 2a-1 & a \\ 2-a & 1-a & 0 \end{pmatrix}$$

PARTIE 1

1. a) Vérifier que le polynôme caractéristique de M_a est $Q_a(x) = -(X-1)(X-a+1)(X-a)$. (Pour faciliter les calculs, on pourra utiliser des opérations sur les lignes et les colonnes du déterminant qui correspond au polynôme caractéristique de M_a).

   b) i) En déduire le déterminant de M_a.

   ii) Pour quelle valeur de a la matrice M_a est inversible.

2. Montrer que le réel λ est une valeur propre de f_a si et seulement si λ est racine du polynôme Q_a.

3. a) En déduire les valeurs propres de f_a.

   b) Dans quels cas, les valeurs propres sont d'ordre de multiplicité 2? justifier votre réponse.

4. Posons $\beta' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ la famille de vecteurs de E définie par $\begin{cases} e'_1 = e_1 - e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_1 - 2e_2 + e_3 \\ e'_3 = -e_2 + e_3 \end{cases}$

   a) Vérifier que β' est une base de E.

   b) Vérifier que e'_1, e'_2 et e'_3 sont des vecteurs propres de f_a.

   c) Déterminer la matrice P de passage de la base β à la base β'.

   d) Prouver que la matrice M_a est diagonalisable.

   e) Montrer qu'il existe une matrice diagonale notée D_a à préciser telle que $M_a = PD_aP^{-1}$, la diagonale de D_a est formée respectivement par les valeurs propres associées aux vecteurs propres e'_1, e'_2 et e'_3.

   f) Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer M_a^n en fonction de P, D_a et n, justifier votre réponse.

   j) En déduire l'expression de M_a^n sous la forme d'un tableau.

   h) Dans le cas où M_a est inversible, déterminer l'expression de M_a^{-1} sous la forme d'un tableau.

PARTIE 2

On considère le système d'équations différentiel suivant:

$$(SED) \quad \begin{cases} x'(t) = x(t) - 2y(t) - 2z(t) \\ y'(t) = x(t) + 5y(t) + 3z(t) \\ z'(t) = -x(t) - 2y(t) \end{cases},$$

avec les conditions initiales suivantes: $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, $z(0) = 3$.

1. Etablir que $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = M_{a_0} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, à préciser la valeur de a_0.

2. On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$.

   a) Vérifier que $P^{-1}X'(t) = D_{a_0}P^{-1}X(t)$.

   b) En faisant le changement de variable $Z(t) = P^{-1}X(t)$, vérifier que $Z'(t) = D_{a_0}Z(t)$.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2521 - Wadifa Info - page 5/7

c) En posant $Z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix}$, déterminer les fonctions z_1, z_2 et z_3.

3. En déduire la solution du système d'équations différentiel (SED).

PARTIE 3

Pour toute matrice $E \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{C}(E) = \{F \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R});\ \ EF = FE\}$.

1. Vérifier que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour toutes matrices F, G de $\mathcal{C}(E)$, $F - G$, FG, αF sont des éléments de $\mathcal{C}(E)$.
2. Montrer que si F est inversible, alors $F \in \mathcal{C}(E)) \Leftrightarrow F^{-1} \in \mathcal{C}(E)$.
3. On suppose que $a \notin \{1, 2\}$, déterminer $\mathcal{C}(D)$.
4. Soient E, F deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et soit H une matrice inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence: $F \in \mathcal{C}(E) \Leftrightarrow H^{-1}FH \in \mathcal{C}(H^{-1}EH)$.
5. On suppose que $a \notin \{1, 2\}$, déterminer $\mathcal{C}(M_a)$.
6. Vérifier que $\mathcal{C}(M_a)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.

FIN DE L'ÉPREUVE

★ ★ ★ ★ ★

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2521 - Wadifa Info - page 6/7

Wadifa Info

www.wadifa-info.com

Le sujet suivant à préparer — **النموذج التالي للتحضير**

نموذج مباراة ولوج المدارس الوطنية للتجارة والتسيير ENCG 2009 - اختبار الأهلية للتكوين في

Modèle concours d'accès – Réseau des Écoles Nationales de Commerce et de Gestion (ENCG) 2009 – Test d'Admissibilité à

www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/1185

Chaîne WhatsApp — **قناة واتساب**

المباريات الجديدة والنتائج كل يوم

Nouveaux concours et résultats chaque jour

wadifa-info.com/wa

Chaîne YouTube — **قناة يوتيوب**

امتحانات تجريبية بالتصحيح، بالدارجة

Examens blancs corrigés, expliqués en darija

youtube.com/@wadifainfo

Envoyer à un ami — **أرسل النموذج لصديق**

شارك هذا النموذج على واتساب مع من يحضّر معك

Partagez ce sujet sur WhatsApp

wa.me