

Concours d'accès à l'ENSMR pour les titulaires
Examen d'Algèbre

Problème : Soient les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose : $A^0 = I, \forall n \in \mathbb{N}, A^{n+1} = A^n \cdot A$, et $S_0 = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=0}^{n-1} A^k$

1. Calculer $L.M$ et $M.L$.
2. Calculer L^2 et M^2 . Déduire L^n et $M^n, n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
3. Montrer que $A^n = 3^{n-1} \cdot L - (-3)^{n-1} \cdot M, n \in \mathbb{N}^*$. Ind. remarquer la relation entre A, M , et L .
4. Exprimer S_n en fonction de I, L, M et n .
5. On pose $S = I - A$
 - a. Démontrer que S est inversible et calculer S^{-1}
 - b. En déduire que : $S_n = S^{-1} \cdot (I - A^n)$
6. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}},$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites de nombres réels, on pose :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

On considère l'équation matricielle suivante : $\forall n \in \mathbb{N}^* : X_n = AX_{n-1} + B,$

- a. Montrer par récurrence que: $X_n = A^n X_0 + S_n B, \forall n \in \mathbb{N}$
- b. En utilisant les résultats précédents déduire les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n .

Exercice

- A un endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ on associe sa matrice A dans la base canonique B_n .
- On dit que u (et donc A) est diagonalisable s'il existe une base de vecteurs propres de u .

Soit a, b, c trois réels tels que: $a^2 + b^2 + c^2 = k$ avec $k \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ba & ca \\ ab & b^2 & cb \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le rang de A .
2. Déterminer le noyau et l'image de u . Donner une base du noyau et de l'image.
3. Montrer qu'il existe une valeur propre non nulle. Quels sont les vecteurs propres correspondants?
4. u est-il diagonalisable?

Remarque importante Les réponses doivent présenter clairement en écrivant très lisiblement et très proprement.

3