

Concours d'Accès en première année de l'ENSMR
Epreuve d'analyse
Durée: 1h30
(Les calculatrices et les téléphones sont interdits)

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (4 points)

On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 0$, $f_n(x) = \frac{x}{n^2 + 1}$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ sur $[0, +\infty[$. On notera S la somme de la série.
2. Étudier la convergence normale de cette même série sur $[0, +\infty[$.
3. S est-elle continue sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 2 (6 points)

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ et $K = [0, 1]^2$.

1. Montrer que f admet un minimum et un maximum sur K .
2. Étudier les extrema de f sur son bord $K \setminus]0, 1[^2$.
3. Étudier les extrema de f sur $]0, 1[^2$.
4. Dédire des questions précédentes les points où f admet son minimum et son maximum sur K .

Exercice 3 (6 points)

On considère l'équation : $y'' + 2y' + 4y = xe^x$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E) .
2. Trouver une solution particulière de (E) , puis donner l'ensemble de toutes les solutions de (E) .
3. Déterminer l'unique solution h de (E) vérifiant $h(0) = 1$ et $h(1) = 0$.
4. Soit $f:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $]0, \infty[$ et qui vérifie :

$$t^2 f''(t) + 3t f'(t) + 4f(t) = t \log t.$$

- (a) On pose $g(x) = f(e^x)$, vérifier que g est solution de (E) .
- (b) En déduire une expression de f .

Exercice 4 (4 points)

On note $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$

1. Justifier l'existence de I_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} et en déduire la valeur de I_n à l'aide de factorielles.