ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2010
École Supérieure des Industries du Textile et de l'Habillement
ESITH

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2010

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée 4 heures

Filière **BCPST**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2408 - Wadifa Info - page 1/5

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière BCPST, comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Problème

Pour tout entier naturel n, on note P_n la fonction polynomiale définie par

$$P_n(x) = 1 + x + \cdots + x^{2n},\ x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi $\quad P_0(x) = 1,\ P_1(x) = 1 + x + x^2 \quad$ et $\quad P_2(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4,\ x \in \mathbb{R}.$

1ère partie

1. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Montrer que pour tout réel $x \neq 1$, $P_n(x) = \dfrac{1 - x^{2n+1}}{1 - x}$.
   (b) Déterminer alors les racines complexes de P_n. P_n a-t-elle des racines réelles ?
2. Quels sont les réels x pour lesquels la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ? En cas de convergence, préciser sa limite.
3. Soit n un entier naturel non nul ; on pose $\varphi_n(x) = 2nx^{2n+1} - (2n+1)x^{2n} + 1,\ x \in \mathbb{R}$.
   (a) Pour $x \neq 1$, exprimer $P_n'(x)$ en fonction de $\varphi_n(x)$.
   (b) Préciser les valeurs de $P_n(1)$, $P_n(-1)$ et celles de $P_n'(1)$, $P_n'(-1)$.
   (c) Étudier les variations de la fonction φ_n sur $\mathbb{R}$ et en déduire celles de P_n ; on résumera la situation dans un tableau de variations de ces deux fonctions.
   (d) Justifier qu'il existe une unique valeur $\alpha_n \in]-1, 0[$ en laquelle φ_n s'annule puis vérifier que la fonction P_n prend une valeur minimale β_n en α_n et que $\beta_n > 0$.
4. Soit n un entier $\geqslant 2$. Dessiner dans un même graphique les courbes représentatives des fonctions P_n, P_{n+1} ainsi que celle de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$, définie sur $]-\infty, 1[$; on précisera les positions relatives de ces courbes et notamment leur points d'intersection.
5. (a) Vérifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\alpha_n^{2n} = \dfrac{1}{1 + 2n(1 - \alpha_n)}$ et justifier l'encadrement
$$\frac{1}{1+4n} \leqslant 2n \ln|\alpha_n| \leqslant \frac{1}{1+2n}.$$
   (b) En déduire la limite de la suite $(\ln|\alpha_n|)_{n\geqslant 1}$ et justifier que $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers -1.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو
Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2408 - Wadifa Info - page 2/5

(c) Montrer que la suite $(\ln|\alpha_n|)_{n\geqslant 1}$ est équivalente à la suite $(-\frac{\ln n}{2n})_{n\geqslant 1}$ puis en déduire un équivalent de $\alpha_n + 1$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(d) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $\varphi_n(\alpha_{n-1}) > 0$ et en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

6. (a) Montrer que la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\dfrac{1}{2}$.

(b) Montrer que la suite $\left(\beta_n - \dfrac{1}{2}\right)_{n\geqslant 1}$ est équivalente à la suite $\left(\dfrac{\ln n}{8n}\right)_{n\geqslant 1}$.

(c) Pour tout entier $n \geqslant 2$, comparer $P_n(\alpha_n)$ et $P_{n-1}(\alpha_n)$ puis en déduire que la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

2ème partie

Pour tout couple $u = (x, y)$ de réels, on considère la fonction f_u définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_u(t) = \frac{x + ty}{P_1(t)}.$$

1. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^2$, la fonction f_u est bornée. (On pourra calculer les limites de la fonction f_u en $\pm\infty$.)

2. Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$; on pose $\quad N(u) = \sup\{|f_u(t)| \ ; \ \ t \in \mathbb{R}\}$.

(a) Si $y = 0$, montrer que $N(u) = \frac{4}{3}|x|$.

(b) Si $y \neq 0$.

i. Montrer que $M := \sup\{f_u(t) \ ; \ \ t \in \mathbb{R}\} > 0$ et que $m := \inf\{f_u(t) \ ; \ \ t \in \mathbb{R}\} < 0$ et justifier que ces bornes sont atteintes.

ii. Montrer que $N(u) = 1$ si et seulement si $M = 1$ et $m \geqslant -1$ ou $M \leqslant 1$ et $m = -1$.

iii. Montrer que $f_u(t_0) = M = 1$ si et seulement si t_0 est racine double de l'équation $t^2 + (1 - y)t + (1 - x) = 0$, puis justifier que $(1 - y)^2 = 4(1 - x)$.

iv. Montrer que $f_u(t_0) = m = -1$ si et seulement si t_0 est racine double de l'équation $t^2 + (1 + y)t + (1 + x) = 0$, puis justifier que $(1 + y)^2 = 4(1 + x)$.

3. (a) Reconnaître la courbe de $\mathbb{R}^2$ d'équation $(1 - y)^2 = 4(1 - x)$ ainsi que celle d'équation $(1 + y)^2 = 4(1 + x)$, et les dessiner sur un même graphique.

(b) Préciser l'ensemble S des points $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels $N(u) = 1$ et le dessiner sur la figure précédente.

Exercice

On note $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, et E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ constitué des fonctions continues et 2π-périodiques.

Si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on définit l'application Tf par

$$Tf(x) = \frac{1}{2}\left(f(\frac{x}{2}) + f(\frac{x + 2\pi}{2})\right).$$

Pour tout entier relatif k, on note e_k la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$e_k(x) = e^{ikx}, \ x \in \mathbb{R}.$$

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2408 - Wadifa Info - page 3/5

1. Vérifier que pour tout entier relatif k, $e_k \in E$.
2. Montrer que si $f \in E$ alors Tf est aussi un élément de E.
3. Soit $f \in E$; exprimer les coefficients de Fourier trigonométriques de Tf en fonction de ceux de f.
4. On note $\mathcal{H}_0 := = \{f \in E\,;\, \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0\}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{H}_0$ est un sous-espace vectoriel de E.
   (b) Montrer que $\mathcal{H}_0$ est stable par T, c'est-à-dire que si $f \in \mathcal{H}_0$ alors Tf aussi.
5. (a) Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathcal{H}_0$ et $\mathrm{Vect}(e_0)$ sont supplémentaires dans E.
   (b) Préciser la projection de E sur $\mathrm{Vect}(e_0)$ parallèlement à $\mathcal{H}_0$.
6. Soit n un entier $\geqslant 1$; on désigne par E_n le sous-espace vectoriel de E engendré par les fonctions $e_{-n}, \ldots, e_{-1}, e_0, e_1, \ldots, e_n$, c'est-à-dire $E_n = \mathrm{Vect}(e_{-n}, \ldots, e_{-1}, e_0, e_1, \ldots, e_n)$.
   (a) Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} e_p(t)e_{-q}(t)\,dt$, pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$.
   (b) Montrer que la famille $(e_{-n}, \ldots, e_{-1}, e_0, e_1, \ldots, e_n)$ est libre.
   (c) Quelle est la dimension de E_n ?
7. (a) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, préciser Te_k selon la parité de l'entier k.
   (b) En déduire que E_n est stable par T.
8. Dans la suite, on note T_2 l'endomorphisme de E_2 induit par T.
   (a) Écrire la matrice de T_2 relativement à la base $\mathcal{B} = (e_{-2}, e_{-1}, e_0, e_1, e_2)$ de E_2.
   (b) Déterminer les valeurs propres de T_2 ainsi que les sous-espaces propres associés.
   (c) L'endomorphisme T_2 est-il diagonalisable ?

FIN DE L'ÉPREUVE

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2408 - Wadifa Info - page 4/5

Wadifa Info

www.wadifa-info.com

Le sujet suivant à préparer — **النموذج التالي للتحضير**

نموذج مباراة ولوج سلك التكوين الأساسي - المدرسة الوطنية العليا للإدارة - دورة 26 نونبر 2016 -

Modèle de concours d'accès au cycle de formation initiale – École Nationale Supérieure de l'Administration – 26 novembre

www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/640

Chaîne WhatsApp — **قناة واتساب**

المباريات الجديدة والنتائج كل يوم

Nouveaux concours et résultats chaque jour

wadifa-info.com/wa

Chaîne YouTube — **قناة يوتيوب**

امتحانات تجريبية بالتصحيح، بالدارجة

Examens blancs corrigés, expliqués en darija

youtube.com/@wadifainfo

Envoyer à un ami — **أرسل النموذج لصديق**

شارك هذا النموذج على واتساب مع من يحضّر معك

Partagez ce sujet sur WhatsApp

wa.me