

**Concours d'Entrée
à la 1ère année du Cycle d'Ingénieur
ENSA DE MArrakech**

Epreuve de Mathématiques et Informatique Durée: 4h Mercredi 15 juillet 2009

Instructions générales:

1. Cet énoncé comporte 5 pages de texte.
2. Les parties Algèbre, Analyse et informatique doivent être rédigées sur les feuilles séparées.
3. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
4. Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction: les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Aucun document n'est autorisé L'emploi d'une calculatrice est interdit

Epreuve d'Analyse
Durée de l'épreuve : 2 heures

Dans ce problème, on étudie les intégrales

$$u_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$$

où $n \in \mathbb{N}$ et

$$G = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2) dt.$$

1. Dans cette question, on étudie la suite (u_n) pour $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Calculer u_0, u_1, u_2 .
- (b) Etablir que $(n+1)u_{n+1} = nu_{n-1}$ pour $n \geq 1$.
- (c) En déduire que la suite $n \rightarrow (n+1)u_{n+1}u_n$ est constante, et préciser la valeur de cette constante.
- (d) Etudier le sens de variation de la suite (u_n) , puis en déduire que

$$nu_n^2 \leq 2\pi \leq (n+1)u_n^2.$$

- (e) En déduire la limite et un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

2. Dans cette question, on étudie les intégrales des fonctions f_n définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \quad \text{si } -\sqrt{n} \leq x \leq \sqrt{n} \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ sinon.}$$

- (a) Etablir les égalités suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx = \int_{-\sqrt{n}}^{+\sqrt{n}} f_n(x) dx = \sqrt{n} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(t) dt.$$

- (b) A l'aide de l'équivalent obtenu à la question 1, en déduire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx.$$

3. Dans cette question, on étudie l'intégrale de la limite de la suite de fonctions (f_n) .

- (a) Déterminer pour tout nombre réel x la limite $f(x)$ de la suite $(f_n(x))$ quand n tend vers $+\infty$.

- (b) Justifier l'inégalité $\ln(1-u) \leq -u$ pour tout nombre réel positif u .
En déduire l'inégalité $f_n(x) \leq f(x)$ pour tout nombre réel x .
- (c) Etablir à l'aide du théorème de convergence dominée dont on rappellera l'énoncé que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

- (d) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2) dt.$$

4. Dans cette question, on étudie la série génératrice des nombres u_n , définie par :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n.$$

- (a) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
- (b) Etudier la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum (1)^n u_n$, et en déduire le domaine de définition D de S .
- (c) Etablir la formule suivante pour tout nombre entier naturel n et tout nombre réel $x \in D$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k x^k = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 - x \cos(t)} - x^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n(t) dt}{1 - x \cos(t)}.$$

- (d) En déduire l'égalité

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 - x \cos(t)}$$

pour $x < 1$, puis pour $x = -1$.

- (e) Calculer $S(-1)$, puis $S(x)$ pour $x < 1$ à l'aide du changement de variables $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$.

Epreuve d'Algèbre

Durée de l'épreuve : 1h30mn heures

Exercice 1 On note par E l'espace vectoriel réel $M_{4,1}(\mathbb{R})$ et on considère f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique B est donnée par

$$M_B(f) = A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de $f : \chi_f$
2. En déduire que f n'est pas inversible.
3. Montrer que f n'est pas diagonalisable.
4. Calculer le polynôme minilal π_f (Justifier votre réponse).
5. Donner alors la réduite de Jordan de $f : J$
6. Montrer que J s'écrit sous la forme : $J = D + N$ où D est une matrice diagonale et N est une matrice nilpotente.
7. Calculer alors A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 2 Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et u un endomorphisme de E tel que $u^3 - u = 0$ ($u^3 = u \circ u \circ u$).

1. Montrer que $E = \ker(u) \oplus \Im(u^2)$.
2. Reprendre la question précédente, sans l'hypothèse de dimension finie.
3. Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et m un entier naturel ≥ 2 et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soient $a_1, \dots, a_{m-1}, a_m$ des réels tels que

$$a_m f^m + a_{m-1} f^{m-1} + \dots + a_2 f^2 + a_1 f = 0$$

avec $a_1 \neq 0$. Montrer que $\ker(f) \oplus \Im(f)$ avec $f^m = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{m \text{ fois}}$.

Exercice 3 Soit E un espace vectoriel réel f un endomorphisme de E . On pose $f^0 = id_E$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_k \text{ fois}$, et on notera :

$$\begin{cases} N_k &= \ker(f^k) \\ C_k &= \Im(f^k) \\ N &= \bigcup_{k=0}^{\infty} N_k \\ C &= \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k \end{cases}$$

à partir de la question 6, on supposera que la dimension de E est finie.

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $N_k \subset N_{k+1}$ et $C_{k+1} \subset C_k$.
2. Montrer que N et C sont deux sous espaces vectoriels de E .
3. Montrer que $f(N) \subset N$ et $f(C) \subset C$
4. Montrer que f est injective $\iff N = \{0\}$
5. Montrer que f est surjective $\iff C = E$.
6. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\begin{cases} N_{p-1} &\subset N_p \\ N_{p+i} &= N_p \end{cases} \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

7. Montrer que $C_{p+i} = C_p \quad \forall i \in \mathbb{N}$.
8. Montrer que $E = C_p \oplus N_p$.

Epreuve d'Informatique

Durée de l'épreuve : 30mn heures

Exercice 1

1. Définir un algorithme.
2. Donner la structure de la description d'un algorithme.
3. Parmi les structures algorithmiques fondamentales on trouve:
 - (a) La structure linéaire.
 - (b) La structure alternative.
 - (c) La structure de choix.
 - (d) La structure itérative.Définir chaque structure et les cas quelle présente.
4. Comment faire la déclaration d'une procédure ou d'une fonction en algorithmique ?
5. Comment faire la déclaration itérative sur un tableau en algorithmique ?

Exercice 2

On se propose d'étudier la suite du terme général

$$U_n = \frac{1}{n^2}, \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*,$$

ainsi que la suite définie par :

$$V_n = \sum_{k=1}^n U_k.$$

. Pour ce faire, on souhaite écrire un algorithme qui affiche, ligne par ligne la valeur de n , celle de U_n et celle de V_n et ce tant que le terme. $U_n > 0,001$. Ecrire l'algorithme.