

**Concours d'Entrée
à la 1ère année du Cycle d'Ingénieur**

Epreuve de Mathématiques Durée : 3h Vendredi 15 juillet 2005
--

Instructions générales :

1. Cet énoncé comporte 4 pages de texte.
2. Livres et notes de cours ne sont pas autorisés.
3. Les parties Algèbre et Analyse doivent être rédigées sur deux feuilles séparées.
4. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
5. Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

1 Algèbre

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive (i.e. tous les éléments de cette matrice sont positifs). Dans les questions 1. et 2. on suppose, en outre, que A satisfait à la condition suivante :

$r = \rho(A)$ est l'unique valeur propre de A de module égal à r et $\text{Ker}(rI_n - A)$ est une droite vectorielle engendrée par un vecteur v . Pour chaque choix de v , il existe un unique vecteur $w \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$w > 0 \quad , \quad w^T A = r w^T \quad \text{et} \quad w^T v = 1.$$

On admet aussi que toute matrice carrée strictement positive satisfait à cette condition.

1. On pose $L = v w^T$.
 - i. Montrer que L est indépendante du choix de v .
 - ii. Montrer que L est strictement positive et de rang 1.
 - iii. Montrer que l'endomorphisme $L : x \mapsto Lx$ de $\mathbb{C}^n$ est la projection sur la droite vectorielle $\mathbb{C} \cdot v$ parallèlement à l'hyperplan $H = \{x \in \mathbb{C}^n : w^T x = 0\}$.
2. i. Montrer que H est stable par A et que si x est un vecteur non nul de H tel que $Ax = \mu x$ ($\mu \in \mathbb{C}$) alors $|\mu| < r$.
 - ii. En déduire que dans une base convenable $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^n$, l'endomorphisme $x \mapsto Ax$ a une matrice A' de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

avec $M \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ et $\rho(M) < r$.

Vérifier que r est racine simple du polynôme caractéristique $P_A(X)$ de A .

- iii. Calculer $L' = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{A'}{r} \right)^k$ et décrire géométriquement l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^n$ est L' .
 - iv. En déduire que $L = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{A}{r} \right)^k$ et qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k \geq k_0$ on ait $A^k > 0$.
3. Dans cette question A est une matrice carrée positive quelconque.
 - i. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A(\varepsilon) = A + \varepsilon J$.
 Montrer que la fonction $f : \varepsilon \mapsto \rho(A(\varepsilon))$ est croissante sur $]0, +\infty[$ et que $l = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(\varepsilon) \geq \rho(A)$. (*Indication* : Montrer que si $0 \leq A \leq B$ alors $\|A^k\|_\infty \leq \|B^k\|_\infty$ et on rappelle que $\rho(A) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^k\|^{1/k}$).
 - ii. Montrer que $f(\varepsilon) = \rho(A(\varepsilon))$ est une valeur propre de $A(\varepsilon)$ et qu'il existe un unique vecteur propre, noté $x(\varepsilon)$, associé à cette valeur propre et appartenant à l'ensemble : $K = \{x = (x_1 \dots x_n)^T \in \mathbb{R}^n : x \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$.
 - iii. En déduire qu'il existe $x \in K$ tel que $Ax = lx$. Comparer l et $\rho(A)$.

2 Analyse

Les deux parties sont indépendantes.

Partie I

On considère la fonction indéfiniment dérivable φ définie par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad \forall x \in [0, 1[.$$

1. Pour tout réel x de $[0, 1[$ et tout entier naturel n , établir l'égalité :

$$\varphi^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{4^n n!} (1-x)^{-\frac{2n+1}{2}}.$$

2. Pour tout réel x de $[0, 1[$ et tout entier naturel n , justifier l'égalité suivante :

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^n \frac{C_{2k}^k}{4^k} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(t) dt.$$

3. a. Pour tout entier naturel n , prouver l'inégalité :

$$C_{2n+2}^{n+1} \leq 4^{n+1}.$$

- b. Pour tout couple (t, x) de réels tel que $0 \leq t \leq x < 1$, vérifier les inégalités :

$$0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x.$$

- c. En déduire que, pour tout réel x de $[0, 1[$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(t) dt = 0.$$

4. Pour tout réel x de $[0, 1[$, démontrer l'égalité :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{C_{2k}^k}{4^k} x^k.$$

Partie II

On considère dans cette partie une suite réelle $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout réel x de $[0, 1[$, la série de terme général $a_k x^k$ converge. Pour tout réel x de $[0, 1[$, on note $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ et l'on suppose que :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (\sqrt{1-x} f(x)) = \sqrt{\pi}.$$

1. a. Pour tout entier naturel p , montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{p+1}}.$$

- b. Pour tout entier naturel p , justifier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}} dt,$$

et, en utilisant le changement de variable $u = \sqrt{2(p+1)t}$, calculer sa valeur.

(On rappelle la valeur de l'intégrale de Gauss $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \frac{1}{2}$).

- c. En déduire l'égalité :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} \right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}} dt.$$

2. Montrer que, pour toute application polynomiale réelle Q , on a :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k Q(x^k) \right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} Q(e^{-t}) dt.$$

3. Soit h la fonction définie, pour tout réel x de $[0, 1[$, par :

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{e}[\\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in [\frac{1}{e}, 1] \end{cases}.$$

- a. Justifier la convergence de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t}) dt$ et donner sa valeur.

- b. Soit x un réel de $[0, 1[$. En déterminant la valeur de $h(x^k)$ pour k assez grand, justifier la convergence de la série de terme général $a_k x^k h(x^k)$.

4. On **admet** l'égalité :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k h(x^k) \right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t}) dt.$$

En utilisant ce résultat pour $x = e^{-\frac{1}{n}}$, en déduire que, lorsque l'entier naturel n tend vers l'infini, $\sum_{k=0}^n a_k$ est équivalent à $2\sqrt{n}$.