Royaume du Maroc
Ministère de l'Education Nationale et de la Jeunesse
Ecole Normale Supérieure de l'Enseignement Technique
Mohammedia

Concours d'Admission de 2003
au Cycle Préparation à l'Agrégation
d'Economie et Gestion

Epreuve de Mathématiques
Durée 4 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Si au cours de l'épreuve un condidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

N.B. Aucun document n'est autorisé.

Algèbre

On rappelle que:

- Une matrice a une limite si et seulement si tous ses termes sont des suites réelles convergentes.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x)^k}{k!} = e^x$.

Soit a un réel strictement positif. On considère, pour tout x réel, la matrice:

$$A(x) = \begin{bmatrix} a^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

$\mathbf{Q}_1$: Calculer $A(x) \times A(y)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. En déduire que $A(x)$ est inversible et déterminer son inverse.

$\mathbf{Q}_2$: Pour $x \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}$, déterminer $(A(x))^n$ (on pose $(A(x))^0 = \mathbb{I}_3$, matrice unité d'ordre 3)

$\mathbf{Q}_3$: Montrer que la suite $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(A(x))^k}{k!}$ converge, et admet pour limite la matrice:

$$exp(A(x)) = \begin{bmatrix} e^{a^x} & 0 & 0 \\ 0 & e & xe \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Montrer que $exp(A(x))$ est inversible et déterminer son inverse à l'aide de la méthode pivot-Gauss.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2386 - Wadifa Info - page 1/4

Analyse

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$x \mapsto f(x) = x - \frac{1}{4}(x+1)e^{-x}$$

Q_4 : a) Calculer f' et f'' fonctions dérivées première et seconde de f. Etudier les variations de f'. Montrer que l'equation $f'(x) = 0$ admet une seule solution α et que $-1,3 < \alpha < -1,2$.

b) En déduire le sens de variation de f.

Q_5 : a) Etudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Préciser les branches infinies de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f dans un repère orthonormé.

b) Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

Q_6 : On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 \in]-1,0[\\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) = u_n - \frac{1}{4}(u_n+1)e^{-u_n} \end{cases}$$

Montrer que, pour tout entier $n > 0$, $-1 < u_n < 0$ et que la suite u_n est décroissante. Trouver sa limite.

Probabilité

Exercice 1: Une compagnie d'assurance a classé ses assurés en trois classes d'âge:

Classe 1 moins de 25 ans

Classe 2 de 25 à 50 ans

Classe 3 plus de 50 ans

Le tableau suivant donne:

Classe	**Proportion***	**Probabilité****
1	0,25	0,12
2	0,53	0,06
3	0,22	0,09

** La proportion d'assurés appartenant à chaque classe.*

*** La probabilité qu'un assuré d'une classe donnée déclare au moins un accident au cours d'une année.*

Un assurée est tiré au hasard dans le fichier, on note C_i: la personne appartient à la classe i.

Q_7 : On note **A** l'événement ≪ la personne déclare au moins un accident au cours d'une année≫

a) En appliquant la formule des probabilités totales, determiner la probabilité de **A**.

b) Quelle est la probabilité qu'un assuré ayant déclaré au moins un accident en cours d'année, ait moins de 25 ans?

c) Quelle est la probabilité pour qu'un assuré n'ayant pas déclaré d'accident n'appartient pas à la classe 2?

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2386 - Wadifa Info - page 2/4

Q_8 : On considère N personnes assurées de la classe d'âge 2 et soit X la variable aléatoire dont les valeurs representent le nombre d'assurés parmi N, ayant au moins un accident au cours de l'année.

a) Quelle est la loi de X? Son espérance? Sa variance?

b) Quelle est la probabilité qu'au plus k personnes aient déclaré au moins un accident. Donner la valeur approchée de cette probabilité dans le cas: $N = 10$ et $k = 2$.

Exercice 2: Soient g et h les deux fonctions réelles à variable réelle définie par:

$$g(x) = \begin{cases} 2(1-x) & \text{pour } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{pour } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Q_9 : Démontrer que g et h sont des fonctions de densité.

Q_{10} : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes dont les densités respectives sont g et h.

a) Calculer $p\left(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4}\right)$.

b) Calculer $p\,(Y > 3)$.

On définit la variable alátoire réelle $Z = X + Y$ ayant pour densité K notée $K = g * h$ définie pour tout x réelle par:

$$K(x) = \int_0^x g(x-t)h(t)dt$$

Q_{11} : **a)** Démontrer à l'aide d'un changement de variable que:

$$g * h = h * g$$

b) Montrer que

$$K(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x < 0 \\ 4 - 2x - 4e^{-x} & \text{si } x \in [0,1] \\ 2e^{-x}(e-2) & \text{si } \ x \geq 1 \end{cases}$$

c) Calculer $p\left(\frac{1}{2} \leq Z \leq \frac{3}{2}\right)$

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/2386 - Wadifa Info - page 3/4

Wadifa Info

www.wadifa-info.com

Le sujet suivant à préparer — **النموذج التالي للتحضير**

نموذج مباراة ولوج مسلك تكوين أطر الإدارة التربوية - اختبار في علوم التربية - دورة 2025

Modèle : Concours d'accès à la filière de formation des cadres de l'administration pédagogique - épreuve de sciences de

www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/1329

Chaîne WhatsApp — **قناة واتساب**

المباريات الجديدة والنتائج كل يوم

Nouveaux concours et résultats chaque jour

wadifa-info.com/wa

Chaîne YouTube — **قناة يوتيوب**

امتحانات تجريبية بالتصحيح، بالدارجة

Examens blancs corrigés, expliqués en darija

youtube.com/@wadifainfo

Envoyer à un ami — **أرسل النموذج لصديق**

شارك هذا النموذج على واتساب مع من يحضّر معك

Partagez ce sujet sur WhatsApp

wa.me