

Concours d'accès en 1^{ère} année des ENSA Maroc
Août 2014

Epreuve de Mathématiques

Durée : 1H30 min

Exercice 1 :

Soit u_n et v_n les suites réelles définies par :

$$u_0 = \alpha, v_0 = \beta \text{ avec } 0 < \alpha < \beta \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} \\ v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n} \end{cases}$$

On pose : $x_n = \frac{u_n}{v_n}$ et $y_n = u_n - v_n$

Q1. La suite (x_n) :

- | | | | |
|---|--------------------|--------------------|------------|
| A) Converge vers $\frac{\alpha}{\beta}$ | B) Converge vers 1 | C) Converge vers 0 | D) Diverge |
|---|--------------------|--------------------|------------|

Q2. La suite (y_n) :

- | | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|--------------------|------------|
| A) Converge vers $\alpha - \beta$ | B) Converge vers $\alpha + \beta$ | C) Converge vers 0 | D) Diverge |
|-----------------------------------|-----------------------------------|--------------------|------------|

Q3. La suite (u_n) :

- | | | | |
|---------------------------|--------------------------|--------------------|------------|
| A) Converge vers α | B) Converge vers β | C) Converge vers 0 | D) Diverge |
|---------------------------|--------------------------|--------------------|------------|

Q4. La suite (v_n) :

- | | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|--------------------------|------------|
| A) Converge vers $\alpha - \beta$ | B) Converge vers $\beta - \alpha$ | C) Converge vers β | D) Diverge |
|-----------------------------------|-----------------------------------|--------------------------|------------|

Q5. Soit δ un élément de $]0, 1[$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n (1 + \delta^{2^k}) =$$

- | | | | |
|------|--------------|-------------------------|-------------------------|
| A) 1 | B) $+\infty$ | C) $\frac{1}{1-\delta}$ | D) $\frac{1}{1+\delta}$ |
|------|--------------|-------------------------|-------------------------|



Exercice 2 :

Calculer les intégrales suivantes:

Q6. $\int_0^\pi e^t \cos 2t \, dt =$

- A) $\frac{e^\pi}{5}$ B) $\frac{e^\pi+1}{5}$ C) $\frac{e^\pi-2}{5}$ D) $\frac{e^\pi-1}{5}$

Q7. $\int_0^\pi e^t \cos^2 t \, dt =$

- A) $\frac{e^\pi-1}{5}$ B) $\frac{4(e^\pi+1)}{5}$ C) $\frac{3(e^\pi-1)}{5}$ D) $\frac{e^\pi+2}{5}$

Exercice 3:

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et telle que : $\forall x \in [a, b], f(a+b-x) = f(x)$.

Q8. L'intégrale

$$\int_a^b t f(t) dt =$$

- A) $\frac{a+b}{2} \int_a^b f(t) dt$ B) $\frac{a-b}{2} \int_a^b f(t) dt$ C) $\frac{a}{2} \int_a^b f(t) dt$ D) $\frac{b}{2} \int_a^b f(t) dt$

Q9. L'intégrale

$$\int_0^\pi \frac{\sin t}{3 + \cos^2 t} dt =$$

- A) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ B) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$

Q10. L'intégrale

$$\int_0^\pi \frac{t \sin t}{3 + \cos^2 t} dt =$$

- A) $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$ B) $\frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}$ C) $\frac{\pi^3}{6\sqrt{3}}$ D) $\frac{\pi^2}{2\sqrt{3}}$



Exercice 4:

On note $a = \frac{\sqrt[3]{41\sqrt{5}+54\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}$, $b = \frac{\sqrt[3]{54\sqrt{3}-41\sqrt{5}}}{\sqrt{3}}$ et $\lambda = a + b$.

Q11. Le produit ab vaut

- | | | | |
|------------------|------------------|------------------|------|
| A) $\frac{1}{3}$ | B) $\frac{2}{3}$ | C) $\frac{7}{3}$ | D) 1 |
|------------------|------------------|------------------|------|

Q12. λ est solution de l'équation

- | | | | |
|------------------------|------------------------|-------------------|------------------------|
| A) $x^3 - 7x - 36 = 0$ | B) $x^3 + 7x - 21 = 0$ | C) $x^3 - 7x = 0$ | D) $x^3 - 7x - 35 = 0$ |
|------------------------|------------------------|-------------------|------------------------|

Q13. La valeur de λ est alors

- | | | | |
|----------|-----------------|-------------------|------------------|
| A) nulle | B) un réel pair | C) un réel impair | D) $\lambda > 4$ |
|----------|-----------------|-------------------|------------------|

Exercice 5:

Un candidat se présentant à un concours, doit répondre d'une manière successive à une série de questions $(Q_n)_{n \geq 0}$. L'épreuve est présentée en ligne et autre que Q_1 , l'accès à Q_n n'est possible que si le candidat donne une réponse à Q_{n-1} . On admet que:

- la probabilité de donner une bonne réponse à Q_1 est 0,1.
- pour $n > 1$;
 - si le candidat donne une bonne réponse à Q_{n-1} , la probabilité de donner une bonne réponse à Q_n est 0,8.
 - si le candidat donne une mauvaise réponse à Q_{n-1} , la probabilité de donner une bonne réponse à Q_n est 0,6.

On note pour tout entier naturel n non nul, B_n l'évènement "L'étudiant donne une bonne réponse à la question Q_n " et P_n la probabilité de B_n

Q14. La valeur de P_2 est :

- | | | | |
|---------|---------|---------|---------|
| A) 0,52 | B) 0,59 | C) 0,54 | D) 0,62 |
|---------|---------|---------|---------|

Q15. L'étudiant a répondu correctement à la deuxième question, la probabilité qu'il ait donné une mauvaise réponse à la première vaut

- | | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| A) $\frac{27}{37}$ | B) $\frac{21}{37}$ | C) $\frac{27}{31}$ | D) $\frac{21}{31}$ |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|

Q16. La probabilité que le candidat ait au moins une bonne réponse aux trois premières questions est

- | | | | |
|----------|----------|----------|----------|
| A) 0,856 | B) 0,865 | C) 0,685 | D) 0,585 |
|----------|----------|----------|----------|



Exercice 6:

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$; unité graphique 1cm.
Soit A le point d'affixe $3i$. On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z , distinct de A , associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{3iz - 7}{z - 3i}$$

On dit que M est invariant si $M=M'$.

Q17. f admet deux points invariants B et C et on note z_B et z_C les affixes respectives. Montrer que la somme des parties imaginaires de z_B et z_C vaut

- | | | | |
|-------|------|------|-------|
| A) -6 | B) 6 | C) 5 | D) -5 |
|-------|------|------|-------|

On admet que B et C sont tels que $|\operatorname{im}(z_B)| > |\operatorname{im}(z_C)|$ et on appelle $\mathcal{E}$ le cercle de diamètre $[BC]$. Soit M un point quelconque de $\mathcal{E}$ différent de B et de C et M' son image par f

Q18. Il existe un réel θ tel que l'affixe z de M s'écrit

- | | | | |
|------------------------|-------------------------|-------------------------|------------------------|
| A) $3i - 4e^{i\theta}$ | B) $-3i - 4e^{i\theta}$ | C) $3i + 4e^{-i\theta}$ | D) $3i + 4e^{i\theta}$ |
|------------------------|-------------------------|-------------------------|------------------------|

Q19. Il existe un réel θ tel que l'affixe z' de M' s'écrit

- | | | | |
|-------------------------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|
| A) $3i - 4e^{-i\theta}$ | B) $-3i + 4e^{i\theta}$ | C) $-3i - 4e^{-i\theta}$ | D) $3i + 4e^{-i\theta}$ |
|-------------------------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|

Q20. Le point M'

- | | | | |
|--|--|---------------------------------------|--|
| A) est à l'intérieur du cercle $\mathcal{E}$ | B) est à l'extérieur du cercle $\mathcal{E}$ | C) appartient au cercle $\mathcal{E}$ | D) est le centre du cercle $\mathcal{E}$ |
|--|--|---------------------------------------|--|