



المعهد الوطني للبريد والمواصلات السلكية واللاسلكية
INSTITUT NATIONAL DES POSTES ET TELECOMMUNICATIONS

CONCOURS D'ACCES EN DEUXIEME ANNEE
DU CYCLE D'INGENIEURS D'ETAT
11-07-2002

Epreuve de MATHEMATIQUES
(Durée : 3Heures)

Avertissement :

- Les 4 exercices doivent être traités sur des feuilles séparées.
- Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la concision et de la précision de la rédaction. On pourra admettre les résultats d'une question pour traiter les suivantes.



وكالة تنظيم وتنسيق الاتصالات
AGENCE NATIONALE DE RÉGLEMENTATION DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

Exercice 1

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles de carré intégrable et de même espérance m telle que : $\forall n \geq 1, \forall p \geq 1, \text{Var}(X_n + \dots + X_{n+p-1}) \leq Kp^\gamma$ où K est une constante strictement positive et où $0 < \gamma < 1$. On se propose de démontrer que

$$\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} m \quad \text{presque sûrement et en moyenne quadratique.}$$

1) a) Montrer que l'on peut supposer $m = 0$.

b) On suppose dorénavant que $m = 0$. Etablir directement que $\frac{S_n}{n} \rightarrow 0$ en moyenne quadratique, lorsque $n \rightarrow +\infty$.

c) On se donne un entier $k > 1/(2 - \gamma)$. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \sum_{p \geq 1} P\left(\left|\frac{S_{p^k}}{p^k}\right| \geq \varepsilon\right) < +\infty.$$

En déduire que $\frac{S_{p^k}}{p^k} \rightarrow 0$, presque sûrement, lorsque $p \rightarrow +\infty$.

2) On pose pour $p \geq 1, Y_p = \max_{p^k < n \leq (p+1)^k} \left(\frac{S_n}{n} - \frac{S_{p^k}}{p^k}\right)^2$.

a) Montrer que $E(Y_p) \leq \frac{K}{p^{2k}} [(p+1)^k - p^k]^2$.

b) En déduire que $Y_p \rightarrow 0$, p. s., lorsque $p \rightarrow +\infty$.

3) On pose $p(n)$ l'entier qui vérifie $p(n)^k < n \leq (p(n) + 1)^k$.

a) Montrer que

$$\frac{S_n}{n} - \frac{S_{p(n)^k}}{p(n)^k} \rightarrow 0 \quad \text{presque sûrement, lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

b) En déduire que $\frac{S_n}{n}$ converge presque sûrement vers 0, lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 2

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$, $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle_F)$ des espaces de Hilbert réels, de dimension infinie, séparables. Soit $(e_n)_{n \geq 1}$ (resp. $(f_n)_{n \geq 1}$) une famille orthonormale de E (resp. F). Pour tout $u \in E$, tout $v \in F$, on définit $v \otimes u : E \rightarrow F$ par : $(v \otimes u)(x) = \langle x, u \rangle_E v$ pour tout $x \in E$. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues sur E et, pour $A \in \mathcal{L}(E, F)$, $\|A\| = \sup\left\{\frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E} ; x \in E, x \neq 0\right\}$ la norme naturelle de $\mathcal{L}(E, F)$.

1) a) Démontrer que $v \otimes u \in \mathcal{L}(E, F)$ et calculer sa norme.

b) Décrivez $\text{Im}(v \otimes u)$ et $\text{Ker}(v \otimes u)$. Déterminer $(v \otimes u)^*$, l'adjoint de $v \otimes u$.

c) Si $u_1 \in E, u_2 \in E, v_1 \in F, v_2 \in F$, vérifier que $(v_1 \otimes u_1) \circ (v_2 \otimes v_2) = (v_1 \otimes u_2) \circ (u_1 \otimes v_2)$.

2) Soit $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels bornée. On pose pour tout $x \in E$:

$$A(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n (f_n \otimes e_n)(x).$$

Démontrer qu'on définit ainsi $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Calculer $\|A\|$. Déterminer A^* .

3) On suppose que $\lambda_n \neq 0$ pour tout n .

a) Démontrer que A est injective si et seulement si (e_n) est une base hilbertienne de E .

b) Démontrer que $\text{Im}(A)$ est partout dense dans F si et seulement si (f_n) est une base hilbertienne de F .

4) On suppose qu'il existe α et β réels tels que $0 < \alpha \leq |\lambda_n| \leq \beta$ pour tout n . A quelle(s) condition(s) A^{-1} existe-t-il, avec $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$? Déterminer A^{-1} .

Exercice 3

Soit f la fonction périodique de période 1 qui vaut 1 sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et -1 sur $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$. Soit $S_n(x) = \sum_{m=-n}^n \left(\int_0^1 f(t) e^{-2i\pi m t} dt \right) e^{2i\pi m x}$, la somme partielle de la série de Fourier au rang n , associée à la fonction f , au point x .

1) Vérifier que

$$S_n(x) = \int_{-x}^x D_n(t) dt - \int_{-x+\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} D_n(t) dt$$

où D_n est le noyau de Dirichlet $\left(D_n(t) = \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t} \right)$.

2) Montrer qu'il existe $K_1 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$:

$$\left| S_n(x) - \int_{-x}^x D_n(t) dt \right| \leq \frac{K_1}{n}$$

3) Montrer qu'il existe $K_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$:

$$\left| \int_{-x}^x D_n(t) dt - \int_{-x}^x \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\pi t} dt \right| \leq \frac{K_2}{n}$$

4) Montrer que, pour $n \geq 2$, la fonction $g_n(x) = \int_{-x}^x \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\pi t} dt$ atteint son maximum absolu sur $\left]0, \frac{1}{4}\right[$ au point $x = \frac{1}{2n+1}$ et que la valeur de ce maximum ne dépend pas de n .

Montrer que la suite $S_n\left(\frac{1}{2n+1}\right)$ est convergente et que sa limite est strictement supérieure à 1.

En déduire que la convergence de $S_n(x)$ vers $f(x)$ n'est uniforme sur aucun voisinage de 0.

Exercice 4

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ tel que $f(x) \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$ ($\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^N$).

1) Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que $f(x) > f(x_0)$ pour tout $x \notin B_R$, avec $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N ; \|x\| \leq R\}$.

2) Montrer qu'il existe $M_1 > 0$ tel que $|\langle H(x)y, y \rangle| \leq M_1\|y\|^2$ pour tout $y \in \mathbb{R}^N$ et tout $x \in B_{R+1}$ ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien, $H(x)$ est la matrice hessienne de f au point x et R est donné à la question 1)

3) On suppose x_n connu ($n \in \mathbb{N}$). On pose $\omega_n = -\nabla f(x_n)$ où $\nabla f(x_n)$ désigne le gradient de f en x_n . Si $\omega_n = 0$, on pose $x_{n+1} = x_n$. Si $\omega_n \neq 0$, montrer qu'il existe $\bar{\rho} > 0$ tel que $f(x_n + \bar{\rho}\omega_n) \leq f(x_n + \rho\omega_n)$ pour tout $\rho \geq 0$. On choisit alors un $\rho_n > 0$ tel que $f(x_n + \rho_n\omega_n) \leq f(x_n + \rho\omega_n)$ pour tout $\rho \geq 0$ et on pose $x_{n+1} = x_n + \rho_n\omega_n$.

On considère, dans les questions suivantes, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi construite.

4) Montrer que (avec R et M_1 donnés aux questions précédentes) :

(a) La suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente,

(b) $x_n \in B_R$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(c) $f(x_n + \rho\omega_n) \leq f(x_n) - \rho\|\omega_n\|^2 + \frac{1}{2}\rho^2 M_1\|\omega_n\|^2$ pour tout $\rho \in \left[0, \frac{1}{\|\omega_n\|}\right]$.

(d) $f(x_{n+1}) \leq f(x_n) - \frac{\|\omega_n\|^2}{2M_1}$, si $\|\omega_n\| \leq M_1$,

(e) $-f(x_{n+1}) + f(x_n) \geq \frac{\|\omega_n\|^2}{2M}$, avec $M = \sup(M_1, M_2)$, $M_2 = \sup\{\|\nabla f(x)\| ; x \in B_R\}$.

5) Montrer que $\nabla f(x_n) \rightarrow 0$ (quand $n \rightarrow +\infty$) et qu'il existe une sous suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $x_{n_k} \rightarrow x$ quand $k \rightarrow +\infty$ et $\nabla f(x) = 0$.

6) On suppose qu'il existe un unique $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ tel que $\nabla f(\bar{x}) = 0$. Montrer que $f(\bar{x}) \leq f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et que $x_n \rightarrow \bar{x}$ quand $n \rightarrow +\infty$.