Concours d'Accès en Première Année

Epreuve de Mathématiques

15/07/2025 à 09h

Durée : 3 h

L'usage de calculatrices est interdit

- Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend quatre pages.
- Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction (les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées).
- Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
- Le sujet comporte deux parties indépendantes.

PARTIE I

Dans tout le problème, on note $\mathcal{M}_n$ l'espace vectoriel des matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels. La matrice identité est notée I.

On rappelle qu'une base $\mathcal{B}_n$ de $\mathcal{M}_n$ (dite *base canonique* de $\mathcal{M}_n$) est constituée des matrices $E_{k,\ell} = (m_{i,j})_{i,j\in\{1,\cdots,n\}}$, où :

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) = (k,\ell) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(C'est-à-dire que tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la ligne k et de la colonne ℓ, qui vaut 1.)

L'objet du problème est l'étude d'une application linéaire de $\mathcal{M}_n$ dans $\mathbb{R}$.

I.A. Cas $n = 2$

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2$. On pose :

$$\varphi(M) = a + d$$

I.A.1. Vérifier que l'application $\varphi : \mathcal{M}_2 \to \mathbb{R}$ ainsi définie, est linéaire. Quelle est la matrice de φ relativement à la base $\mathcal{B}_2 = \{E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}\}$ de $\mathcal{M}_2$ et à la base $\{1\}$ de $\mathbb{R}$?

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/1940 - Wadifa Info - page 1/5

I.A.2. Déterminer l'image et le noyau de φ, ainsi que les dimensions de ces espaces vectoriels. Expliciter une base de $\ker\varphi$ et compléter celle-ci en une base de $\mathcal{M}_2$.

I.A.3. Soit $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2$. Montrer qu'il n'existe pas de couple $(M, N) \in \mathcal{M}_2 \times \mathcal{M}_2$ tel que $MN - NM = I$.

I.A.4. Montrer que si $MN = NM$ pour toute matrice $N \in \mathcal{M}_2$, alors $M = \lambda I$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

I.B. Cas général

Dans cette partie, la matrice $M \in \mathcal{M}_n$ est notée $M = (a_{i,j})_{i,j\in\{1,\cdots,n\}}$, et on pose :

$$\varphi(M) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

C'est-à-dire $\varphi(M)$ est la somme des éléments de la diagonale de M.

I.B.1. Quelle est la dimension du noyau de $\varphi : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}$?

I.B.2. Expliciter une base du noyau de φ. (On pourra considérer, en particulier, les matrices $E_{1,1} - E_{i,i}$ pour $i \neq 1$)

I.B.3. Soient $M = (a_{i,j})_{i,j\in\{1,\cdots,n\}}$ et $N = (b_{i,j})_{i,j\in\{1,\cdots,n\}}$ dans $\mathcal{M}_n$. Démontrer que :

$$\varphi(MN) = \varphi(NM)$$

I.B.4. Soit $f : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}$ une application linéaire, et $M = (a_{i,j})_{i,j\in\{1,\cdots,n\}} \in \mathcal{M}_n$. Écrire l'expression de $f(M)$ à l'aide de $f(E_{i,j})$.

En déduire qu'il existe une matrice $A_f \in \mathcal{M}_n$, unique, que l'on explicitera, telle que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n, \quad f(M) = \varphi(A_f M)$$

I.B.5. Vérifier que l'application :

$$\Psi : f \mapsto A_f$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R})$ sur $\mathcal{M}_n$.

I.B.6. Montrer qu'une matrice M qui commute à toute matrice de $\mathcal{M}_n$ est un multiple de I.

PARTIE II

II.A. On considère l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$$

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/1940 - Wadifa Info - page 2/5

Où n désigne un entier naturel.

II.A.1.

II.A.1.1. Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n.

II.A.1.2. En déduire une expression de I_{2n} et I_{2n+1} à l'aide de factorielles.

II.A.2.

II.A.2.1. Montrer l'équivalence : $I_n \underset{\infty}{\sim} I_{n+1}$.

II.A.2.2. Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $J_n = (n+1)I_nI_{n+1}$ est constante et en déduire l'équivalence : $I_n \underset{\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

II.A.2.3. Montrer, lorsque t, réel, tend vers $+\infty$, l'équivalence :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^t \, dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{2t}}$$

II.A.2.4. À l'aide de la série de terme général $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(x)|^x \, dx$, montrer que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} |\sin(x)|^x \, dx$ est divergente.

II.A.3. On pose, pour $n \geq 1$:

$$u_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n - \ln(n!) \quad \text{et} \quad v_n = u_{n+1} - u_n$$

II.A.3.1. Montrer l'équivalence : $v_n \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$.

II.A.3.2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On notera S sa limite.

II.A.4. Établir l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$n! \underset{\infty}{\sim} Cn^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$$

II.A.5. En utilisant la question II.A.2.2, en déduire l'équivalent de Stirling :

$$n! \underset{\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$$

II.B. On considère les séries entières :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$$

$$\sum_{n\geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n$$

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/1940 - Wadifa Info - page 3/5

II.B.1. Montrer que la première série entière définit une fonction continue sur $[-1,1[$ et calculer sa somme f.

II.B.2. On considère la seconde série entière.

II.B.2.1. Déterminer son rayon de convergence. On note g sa somme, là où elle converge.

II.B.2.2. Montrer que cette série entière converge pour $x=-1$ et calculer $g(-1)$.

II.B.3. Déterminer la limite à gauche de g en 1.

II.B.4.

II.B.4.1. Montrer l'existence d'une limite ℓ à gauche en 1 de $g(x)+\ln(1-x)$.

II.B.4.2. On pose, pour n entier strictement positif :

$$w_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$$

Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

II.B.4.3. Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel γ strictement positif.

II.B.5. Établir que $\ell=-\gamma$.

•• FIN ••

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/1940 - Wadifa Info - page 4/5

Wadifa Info

www.wadifa-info.com

Le sujet suivant à préparer — **النموذج التالي للتحضير**

نموذج مباراة ولوج سلك التكوين الأساسي - المدرسة الوطنية العليا للإدارة - دورة 26 نونبر 2016 -

Modèle de concours d'accès au cycle de formation initiale – École Nationale Supérieure de l'Administration – 26 novembre

www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/640

Chaîne WhatsApp — **قناة واتساب**

المباريات الجديدة والنتائج كل يوم

Nouveaux concours et résultats chaque jour

www.wadifa-info.com/wa

Chaîne YouTube — **قناة يوتيوب**

امتحانات تجريبية بالتصحيح، بالدارجة

Examens blancs corrigés, expliqués en darija

youtube.com/@wadifainfo

Envoyer à un ami — **أرسل النموذج لصديق**

شارك هذا النموذج على واتساب مع من يحضّر معك

Partagez ce sujet sur WhatsApp

wa.me