Concours d'entrée à l'École Nationale de l'Industrie Minérale

Juillet 2013

EPREUVE D'ANALYSE

PROBLEME 1

On considère l'application

$$f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie I : Etude de l'application f

1) Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.

2) On considère l'application

$$A : [0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto A(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$

a) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$ et que, pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{A(x)}{x^2}$

b) Montrer que f' admet $-\dfrac{1}{2}$ comme limite en 0 à droite.

c) Démontrer que f est de classe C^1 sur $[0;+\infty[$ et préciser $f'(0)$.

d) Dresser le tableau de variation de A.
En déduire que f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

e) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3) On considère l'application

$$B : [0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto B(x) = -\frac{3x^2+2x}{(1+x)^2} + 2\ln(1+x)$$

a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$, et que, pour tout $x \in]0;+\infty[$,

$$f''(x) = \frac{B(x)}{x^3}.$$

b) Dresser le tableau de variation de B.
En déduire que f est convexe sur $]0;+\infty[$.

4) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Partie II : Un développement en série

1) Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0;1]$:

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}$$

2) En déduire, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0;1]$:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + J_N(x),$$

où on a noté $J_N(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}\,dt$.

3) Établir, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0;1]$: $|J_N(x)| \leqslant \dfrac{x^{N+2}}{N+2}$.

4) En déduire que, pour tout $x \in [0;1]$, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ converge et que :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/1936 - Wadifa Info - page 1/3

Partie III : Egalité d'une intégrale et d'une somme de série

1) Montrer, en utilisant le résultat de II.3., pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0;1]$:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right| \leqslant \frac{x^{N+1}}{N+2}$$

2) Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge et que : $\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

3) Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2} \\ \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2} \end{cases}$$

4) On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer : $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{\pi^2}{12}$.

Partie IV : Recherche d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles

On note $F :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

et $G :]0;+\infty[^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto G(x,y) = F(xy) - F(x) - F(y)$.

1) Montrer que G est de classe C^2 sur $]0;+\infty[^2$.
Exprimer, pour tout $(x,y) \in]0;+\infty[^2$, les dérivées partielles premières et secondes de G en (x,y) en fonction de x, y, $f(x)$, $f(y)$, $f(xy)$, $f'(x)$, $f'(y)$, $f'(xy)$.

2) Établir que G admet $(1,1)$ comme unique point critique.

3) Est-ce que G admet un extremum local ?

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/1936 - Wadifa Info - page 2/3

Wadifa Info

www.wadifa-info.com

Le sujet suivant à préparer — **النموذج التالي للتحضير**

نموذج مباراة ولوج سلك التكوين الأساسي - المدرسة الوطنية العليا للإدارة - دورة 26 نونبر 2016 -

Modèle de concours d'accès au cycle de formation initiale – École Nationale Supérieure de l'Administration – 26 novembre

www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/640

Chaîne WhatsApp — **قناة واتساب**

المباريات الجديدة والنتائج كل يوم

Nouveaux concours et résultats chaque jour

www.wadifa-info.com/wa

Chaîne YouTube — **قناة يوتيوب**

امتحانات تجريبية بالتصحيح، بالدارجة

Examens blancs corrigés, expliqués en darija

youtube.com/@wadifainfo

Envoyer à un ami — **أرسل النموذج لصديق**

شارك هذا النموذج على واتساب مع من يحضّر معك

Partagez ce sujet sur WhatsApp

wa.me