Concours d'entrée à l'Ecole Nationale de l'Industrie Minérale

Juillet 2013

EPREUVE D'ALGEBRE

Exercice:

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 9 \\ 9 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de A. Donner une base de vecteurs propres de A et diagonaliser A
2. On cherche à déterminer une matrice B telle que $B^3 = A$.
   (a) Démontrer que si λ est une valeur propre de B alors λ^3 est une valeur propre de A.
   (b) Déterminer les valeurs propres de B et leur multiplicité.
   (c) Ecrire le polynôme caractéristique de B.
   (d) Déterminer B telle que $B^3 = A$.

PROBLEME 2

On note n un nombre entier fixé supérieur ou égal 2, E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n et $B = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de E.

Partie I : Étude d'un endomorphisme de E

1) Montrer que, pour tout polynôme P de E, le polynôme $\left((X^2-1)P\right)''$ est élément de E, où $\left((X^2-1)P\right)''$ désigne le polynôme dérivée seconde de $(X^2-1)P$.

On note $\Phi : E \to E$ l'application qui, à tout polynôme P de E, associe $\Phi(P) = \left((X^2-1)P\right)''$.

2) Vérifier : $\Phi(1) = 2, \quad \Phi(X) = 6X$.

3) Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

4) Calculer $\Phi(X^k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et écrire la matrice A de Φ dans la base B.

5)a) Montrer que Φ admet $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes que l'on notera $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$, avec $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$.

b) Est-ce que Φ est bijectif ?

c) Montrer que Φ est diagonalisable et déterminer, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la dimension du sous-espace propre de Φ associé à λ_k.

6) Soient $k \in [\![0, n]\!]$ et P un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre λ_k.

a) Montrer que le degré du polynôme P est égal à k.

b) Montrer que le polynôme Q défini par $Q(X) = P(-X)$ est un vecteur propre de Φ associé à λ_k.

7) En déduire qu'il existe une unique base $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ de E constituée de vecteurs propres de Φ telle que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, P_k est un polynôme de degré k, de coefficient dominant égal à 1 et vérifiant $P_k(-X) = (-1)^k P_k(X)$.
Que peut-on en déduire sur la parité de P_k ?

8) Calculer P_0, P_1, P_2, P_3.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/1935 - Wadifa Info - page 1/3

Partie II : Un produit scalaire sur E

1) Montrer que l'application : $(P,Q) \mapsto (P|Q) = \int_{-1}^{1}(1-x^2)P(x)Q(x)\,dx$ est un produit scalaire sur E.

On munit dorénavant E de ce produit scalaire noté $(.|.)$.

2)a) À l'aide d'intégrations par parties, établir que Φ est un endomorphisme symétrique de E.

b) Montrer que la base $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ de E obtenue à la question I.7 est orthogonale.

Soit $j \in [\![1, n]\!]$.

3)a) Montrer que pour tout polynôme S de degré inférieur ou égal à $j-1$, on a : $(S|P_j) = 0$.

b) En considérant $(1|P_j)$, montrer que P_j ne garde pas un signe constant sur l'intervalle $]-1;1[$.

c) En déduire que P_j admet au moins, dans l'intervalle $]-1;1[$, une racine d'ordre de multiplicité impair.

4) On note $\{x_1, \ldots, x_m\}$ l'ensemble des racines d'ordre de multiplicité impair de P_j appartenant à l'intervalle $]-1;1[$ et $S_m = (X-x_1)(X-x_2)\ldots(X-x_m)$.

a) Justifier : $m \leqslant j$.

b) Montrer que le polynôme $S_m P_j$ (produit des polynômes S_m et P_j) garde un signe constant sur l'intervalle $]-1;1[$.

c) En considérant $(S_m|P_j)$, montrer que $m = j$.

d) En déduire que P_j admet j racines simples réelles toutes situées dans l'intervalle $]-1,1[$.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/1935 - Wadifa Info - page 2/3

Wadifa Info

www.wadifa-info.com

Le sujet suivant à préparer — **النموذج التالي للتحضير**

نموذج مباراة ولوج سلك التكوين الأساسي - المدرسة الوطنية العليا للإدارة - دورة 26 نونبر 2016 -

Modèle de concours d'accès au cycle de formation initiale – École Nationale Supérieure de l'Administration – 26 novembre

www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/640

Chaîne WhatsApp — **قناة واتساب**

المباريات الجديدة والنتائج كل يوم

Nouveaux concours et résultats chaque jour

www.wadifa-info.com/wa

Chaîne YouTube — **قناة يوتيوب**

امتحانات تجريبية بالتصحيح، بالدارجة

Examens blancs corrigés, expliqués en darija

youtube.com/@wadifainfo

Envoyer à un ami — **أرسل النموذج لصديق**

شارك هذا النموذج على واتساب مع من يحضّر معك

Partagez ce sujet sur WhatsApp

wa.me