L'énoncé de cette épreuve comporte 7 pages.
L'usage de la calculatrice est autorisé

On veillera à une présentation claire et soignée des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.

Le sujet est constitué de quatre parties et aborde quelques thématiques en lien avec la mécanique terrestre. Les parties 1 et 4 sont totalement indépendantes des autres parties de l'épreuve. Cependant, certaines questions de la partie 3 utilisent des réponses de la partie 2.

Il est **fortement recommandé de commencer par la première partie**. Cette partie est notée sur **4 points** et le reste de l'épreuve sur **16 points**.

Données numériques :
- Constante de gravitation universelle : $G = 6,7 \times 10^{-11} N.m^2.kg^{-2}$
- Rayon moyen de la Terre : $R = 6,4 \times 10^3 km$
- Masse de la Terre : $M_T = 6 \times 10^{24} kg$
- Vitesse de rotation de la Terre autour de son axe : $\omega_T = 7,3 \times 10^{-5} rad.s^{-1}$

On rappelle la formule du double produit vectoriel suivante :

$$\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\, \vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \vec{c}$$

Partie 1
Etude d'un pendule simple
(Barème : 4/20)

Un objet ponctuel M de masse m est suspendu à l'extrémité d'un fil de masse négligeable et de longueur $L = OM$. Le fil est attaché au point O fixe dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$ supposé galiléen (figure 1).

L'objet est astreint à se déplacer dans le plan vertical Oyz et soumis au champ de pesanteur $\vec{g} = -g\,\vec{u}_z$. Sa position est repérée par l'angle θ que fait le fil avec l'axe vertical Oz. Les frottements seront négligés dans toutes les questions de cette partie.

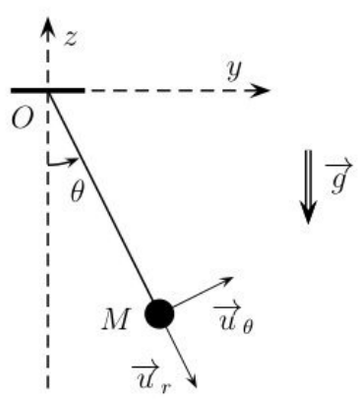

FIGURE 1 – Pendule simple.

1.1. Quelles sont les forces appliquées au point M ? Donner les projections de ces forces dans la base locale $(\vec{u}_r,\ \vec{u}_\theta)$.

1.2. Exprimer la vitesse et l'accélération du point M dans la base $(\vec{u}_r,\ \vec{u}_\theta)$.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو
Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/1921 - Wadifa Info - page 1/8

1.3. Déterminer l'équation différentielle en θ régissant le mouvement du point M dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$.

1.4. On se place dans l'hypothèse des petits mouvements où l'angle θ reste petit. Déterminer $\theta(t)$ sachant que l'objet est abandonné sans vitesse initiale à la position $\theta(0) = \theta_0$.

En déduire que le mouvement est périodique de période : $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$

Partie 2
Gravitation et pesanteur de la Terre sphérique

Dans cette partie, on étudie les actions subies par un objet ponctuel matériel M de masse m dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$. Le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_G$ est supposé galiléen et on le munit du repère $(OXYZ)$ (voir figure 2). Ce référentiel est appelé par la suite "*référentiel absolu*". Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$ est en rotation uniforme autour de l'axe OZ qui relie les les pôles sud et nord de la Terre, avec une vitesse angulaire $\overrightarrow{\omega}_T = \omega_T \overrightarrow{u}_Z$ supposée constante. $\mathcal{R}_T$ est dit "*référentiel relatif*".

Le point M reste suffisamment proche de la surface terrestre de tel sorte qu'on puisse écrire en première approximation $OM \simeq R$. On note H la projection orthogonale de M sur l'axe de rotation OZ.

Dans cette partie, on considère la Terre comme parfaitement sphérique et homogène, de rayon moyen R et de masse M_T.

On rappelle la formule liant les dérivées par rapport au temps d'un vecteur $\overrightarrow{A}$ dans les deux référentiels :

$$\left.\frac{d\overrightarrow{A}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_G} = \left.\frac{d\overrightarrow{A}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_T} + \overrightarrow{\omega}_T \wedge \overrightarrow{A}$$

2.1. Champ gravitationnel de la Terre

2.1.1. Ecrire l'expression de la force de gravitation $\overrightarrow{F}_g$ exercée par la Terre sur l'objet M.

2.1.2. Le champ gravitationnel de la Terre au point M est défini par $\overrightarrow{g_0} = \dfrac{\overrightarrow{F}_g}{m}$. Exprimer $\overrightarrow{g_0}$ en fonction de G, M_T, R et $\overrightarrow{OM}$.

2.2. Lois de composition des vitesses et des accélérations

2.2.1. Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$ est-il galiléen ? Justifier.

On associe au référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$ un repère d'origine un point O' situé la surface de la Terre.

2.2.2. Exprimer la vitesse du point M dans le référentiel absolu en mettant en évidence une vitesse relative et une vitesse d'entrainement. Donner les expressions de ces deux vitesses.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/1921 - Wadifa Info - page 2/8

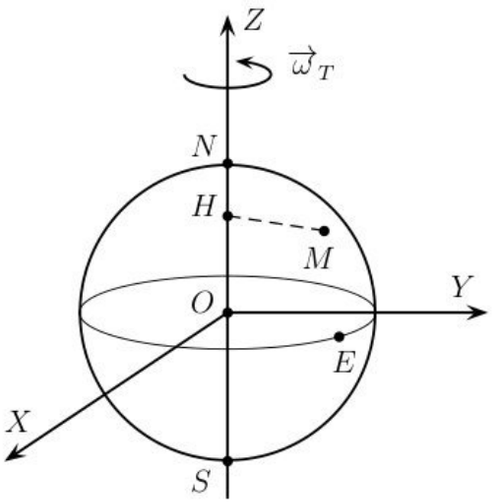

FIGURE 2 – Terre sphérique en rotation autour de l'axe des pôles.

2.2.3. Exprimer l'accélération du point M dans le référentiel absolu en mettant en évidence une accélération relative, une accélération d'entrainement et une accélération complémentaire dite de Coriolis. Donner les expressions de ces trois accélérations.

2.2.4. Montrer que lorsque le point M est soumis uniquement à la force de gravitation dans le référentiel $\mathcal{R}_G$, l'application du principe fondamental de la dynamique dans le référentiel relatif $\mathcal{R}_T$ fait apparaître deux autres forces dont on donnera les noms et les expressions.

2.3. Définition du poids d'un corps

On considère un pendule simple constitué du point M, objet d'étude de cette partie, suspendu par un fil. Ce pendule est supposé en équilibre dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$.

2.3.1. Ecrire la condition d'équilibre du pendule en faisant intervenir la force gravitationnelle, les forces évoquées dans la question précédente et la tension $\overrightarrow{F}$ du fil.

2.3.2. Le poids $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ du corps est défini tel qu'à l'équilibre du pendule, on a la relation : $\overrightarrow{\mathcal{P}} + \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$. Le champ de pesanteur terrestre $\overrightarrow{g}$ au point M est défini par $\overrightarrow{\mathcal{P}} = m\,\overrightarrow{g}(M)$.

Montrer que le champ de pesanteur terrestre au point M est donné par

$$\overrightarrow{g}(M) = -\frac{G.M_T}{OM^3}\overrightarrow{OM} + \omega_T^2\,\overrightarrow{HM} \qquad (1)$$

O étant le centre de la Terre et H la projection orthogonale de M sur l'axe des pôles (voir figure 2).

2.3.3. Calculer la valeur numérique de $\Delta g = ||\overrightarrow{g}(N)|| - ||\overrightarrow{g}(E)||$, la différence des intensités du champ de pesanteur terrestre au pôle nord N et en un point E de l'équateur.

En réalité, on mesure $\Delta g = 52 \times 10^{-3} m.s^{-2}$; proposer une raison pour expliquer l'écart trouvé.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/1921 - Wadifa Info - page 3/8

Partie 3
Aplatissement de la Terre

La force à l'origine de la distinction entre gravitation et pesanteur a pour conséquence un aplatissement de la Terre au niveau de ses pôles nord et sud. Dans cette partie, on se propose d'estimer cet écart à la sphéricité à l'aide d'un modèle simple.

3.1. Fluide en équilibre dans le champ de pesanteur

Soit un fluide homogène de masse volumique ρ supposée la même en tout point M du fluide. On suppose que le fluide, soumis à l'action du champ de pesanteur $\overrightarrow{g} = -g\,\overrightarrow{e}_z$ supposé uniforme, est en équilibre dans un référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen .

Considérons une tranche de fluide ayant la forme d'un cylindre de base S et comprise entre les altitudes z et $z + dz$ (figure 3).

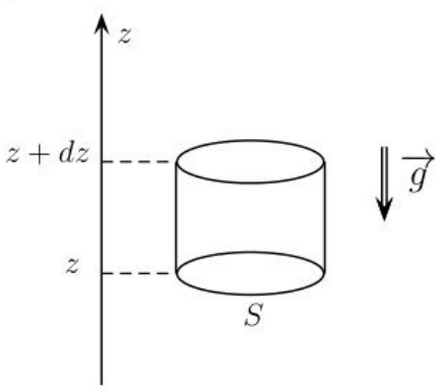

FIGURE 3 – Fluide en équilibre dans le champ de pesanteur.

3.1.1. Faire l'inventaire des forces exercées sur l'élément de volume $d\tau = S\,dz$ du fluide. Justifier que la résultante horizontale des forces de pression est nulle.

3.1.2. Montrer que la résultante verticale des forces de pression subit par l'élément de volume du fluide est

$$-\frac{dP}{dz}\,d\tau\,\overrightarrow{e}_z = -\overrightarrow{grad}\,P\,d\tau$$

3.1.3. Montrer que l'équilibre de l'élément de volume $d\tau$ se traduit par la relation

$$\overrightarrow{grad}\,P = \rho\,\overrightarrow{g}$$

3.1.4. Application

On suppose que l'eau de mer est incompressible, de masse volumique moyenne $\rho_{mer} \simeq 1 \times 10^3 kg.m^{-3}$. A la surface de la mer règne une pression $P_0 = 1 \times 10^5 Pa$. Le champ de pesanteur est supposé uniforme, de valeur $g = 10\,m.s^{-2}$.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/1921 - Wadifa Info - page 4/8

3.1.4.1. Calculer la valeur numérique de la pression à une profondeur $H = 10^3 m$ de la mer.

3.1.4.2. En tenant compte de la faible compressibilité de l'eau, prévoir qualitativement si la pression à la profondeur $H = 10^3 m$ de la mer sera augmentée ou diminuée par rapport à la valeur calculée précédemment.

3.2. Modèle simple de l'aplatissement de la Terre

On modélise la Terre par un fluide incompressible, de masse volumique $\rho_T = \dfrac{3M_T}{4\pi R^3}$ en équilibre dans le référentiel terrestre, en rotation uniforme autour de l'axe des pôles fixe dans le référentiel géocentrique galiléen. Cette rotation fait que la Terre prend la forme d'un ellipsoïde de révolution. On note a le rayon terrestre au niveau de l'équateur et b au niveau des pôles (voir figure 4, où l'aplatissement est représenté de manière exagérée). On définit l'aplatissement f de la Terre par $f = \dfrac{a-b}{a}$.

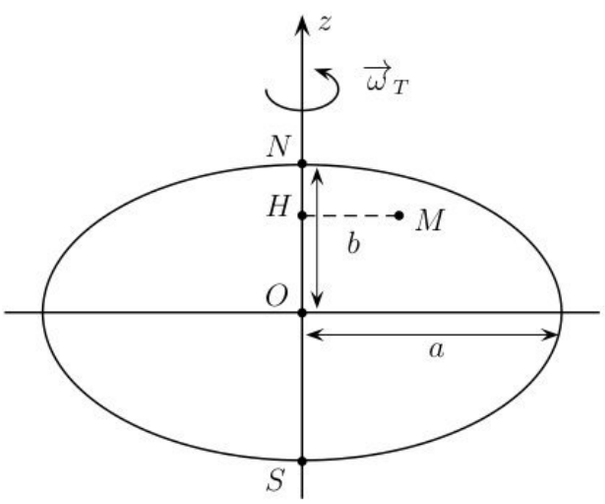

FIGURE 4 – Terre ellipsoïdale.

3.2.1. On définit la quantité ε par la relation : $\varepsilon = \dfrac{\omega_T^2 R^3}{GM_T}$.

En l'écrivant sous la forme du rapport de deux forces par unité de masse, donner la signification physique de la quantité ε. Estimer sa valeur numérique. On utilisera les réponses de la section 2.2.

On admet que l'application de la loi de la statique des fluides dans le référentiel terrestre non galiléen se traduit par l'équation

$$\overrightarrow{grad}(P) = -\frac{4}{3}\pi G\,\rho_T^2\,\overrightarrow{OM} + \rho_T\omega_T^2\,\overrightarrow{HM}$$

M est un point de la Terre et H sa projection orthogonale sur l'axe de rotation. On travaille en coordonnées cartésiennes avec pour axe Oz l'axe des pôles.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/1921 - Wadifa Info - page 5/8

3.2.2. Etablir que le champ de pression P vérifie les trois équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -K_1 x \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -K_1 y \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -K_2 z$$

Exprimer les constantes K_1 et K_2 en fonction de constantes prises parmi ω_T, G, ρ_T.

3.2.3. Résoudre ce système sans chercher à expliciter une éventuelle constante d'intégration apparaissant dans le calcul et qu'on notera C.

3.2.4. Montrer que l'équation de la surface libre du fluide modélisant la Terre se met sous la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, équation d'un ellipsoïde de révolution.

3.2.5. En déduire l'expression de l'aplatissement f de la terre en fonction de K_1 et K_2, puis en fonction de ε. Calculer la valeur numérique de f. Commenter.

Partie 4
Gravimètre optique à chute libre

Dans cette partie, on s'intéresse à la mesure de l'accélération de pesanteur en utilisant une méthode interférométrique. La figure 5 décrit le schéma de principe du dispositif expérimental de mesure de l'accélération de pesanteur terrestre.

Le cœur du dispositif est un système interférentiel, à base des trous d'Young, abrité dans une chambre à vide. Les trous d'Young T_1 et T_2 sont éclairés par une source S supposée ponctuelle monochromatique de longueur d'onde λ. Le phénomène d'interférence est observé sur un écran (E) placé dans le plan focal image d'une lentille mince convergente (L) de distance focale f'. On s'intéresse uniquement aux rayons situés dans la plan Oxz. On note a la distance entre les deux trous et D la distance entre le plan des deux trous et la verticale passant par la source.

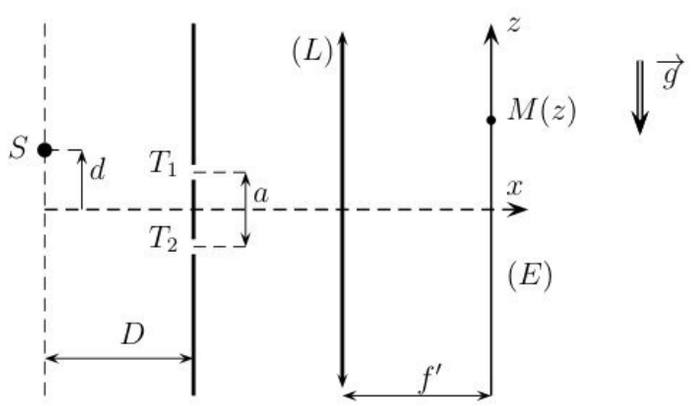

FIGURE 5 – Dispositif des trous d'Young.

4.1. Source fixe

Dans cette section, on suppose que la source S est fixée à la distance d de l'axe Ox. On se place dans les conditions où $|z| \ll f'$ et $d \ll D$.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/1921 - Wadifa Info - page 6/8

4.1.1. Calculer la différence de marche δ entre deux rayons qui traversent les deux trous T_1 et T_2 et qui interférent en un point M de l'écran d'observation. On exprimera δ en fonction de z (position de M sur l'écran), f', a, D et d.

4.1.2. Donner l'expression de l'intensité lumineuse au point $M(z)$. On notera $2I_0$ l'intensité maximale.

4.2. Source en mouvement. Mesure de g

On suppose maintenant que la source S est lâchée sans vitesse initiale, à partir de la position $z_S = d$, dans le champ de pesanteur $\overrightarrow{g} = -g\,\overrightarrow{u}_z$.

4.2.1. Ecrire l'équation horaire du mouvement de la source $z_S(t)$. On néglige les frottements.

On remplace l'écran (E) par un détecteur de lumière (non représenté sur la figure) à base de photodiode placé à la position z_0 de l'écran qui correspond à la différence de marche nulle à l'instant initial : $\delta(t = 0) = 0$. Le signal lumineux détecté par la photodiode est enregistré par un dispositif. Le signal enregistéé est donné sur la figure 6.

4.2.2. Déterminer la position z_0 du détecteur en fonction de d, D et f'.

4.2.3. Exprimer la différence de marche $\delta(t)$, des rayons qui interférent sur le détecteur à un instant $t > 0$.

4.2.4. En utilisant la figure 6 et en remarquant qu'un minimum d'intensité est enregistré en $t = 15\,ms$, déterminer la valeur numérique de g.
On donne $a = 2\,mm$, $D = 1\,m$ et $\lambda = 633\,nm$.

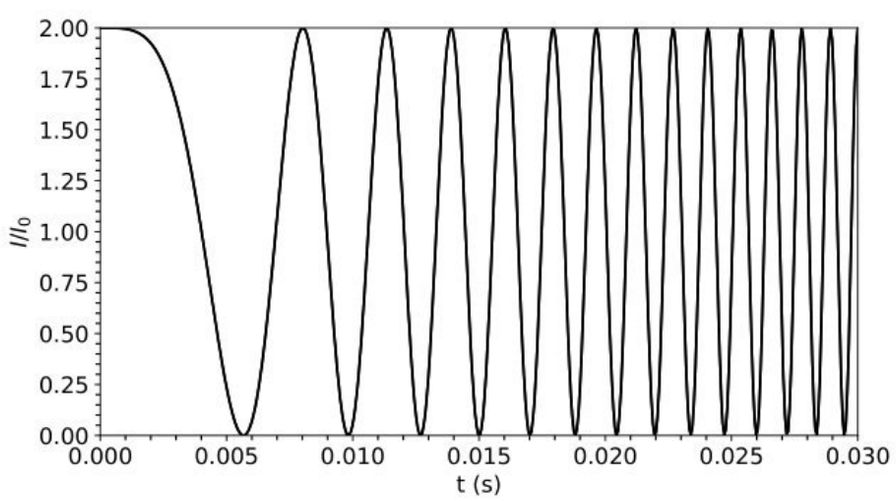

FIGURE 6 – Interférogramme $I(t)$.

FIN DE L'ÉPREUVE

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو
Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/1921 - Wadifa Info - page 7/8

Wadifa Info

www.wadifa-info.com

Le sujet suivant à préparer — **النموذج التالي للتحضير**

نموذج مباراة ولوج سلك التكوين الأساسي - المدرسة الوطنية العليا للإدارة - دورة 26 نونبر 2016 -

Modèle de concours d'accès au cycle de formation initiale – École Nationale Supérieure de l'Administration – 26 novembre

www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/640

Chaîne WhatsApp — **قناة واتساب**

المباريات الجديدة والنتائج كل يوم

Nouveaux concours et résultats chaque jour

wadifa-info.com/wa

Chaîne YouTube — **قناة يوتيوب**

امتحانات تجريبية بالتصحيح، بالدارجة

Examens blancs corrigés, expliqués en darija

youtube.com/@wadifainfo

Envoyer à un ami — **أرسل النموذج لصديق**

شارك هذا النموذج على واتساب مع من يحضّر معك

Partagez ce sujet sur WhatsApp

wa.me