

- On veillera à une présentation et une rédaction claires et soignées des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les **références** des questions abordées.
- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant clairement les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- Toutes les réponses devront être très soigneusement justifiées.
- Si un résultat donné par l'énoncé est non démontré, il peut néanmoins être admis pour les questions suivantes. Ainsi, les diverses parties du problème sont relativement indépendantes entre elles.
- Tous les résultats numériques seront donnés avec un nombre de chiffres significatifs compatibles avec les données fournies.

Le vélo, un ami de l'environnement

Le rejet de dioxyde de carbone par les moteurs thermiques des véhicules est une préoccupation actuelle dans la lutte contre le réchauffement climatique. Le choix d'une propulsion à l'aide d'un moteur électrique s'impose. Mais, à l'heure où les enjeux climatiques deviennent majeurs, on peut se demander s'il est possible d'envisager la promotion du vélo à assistance électrique.

Le sujet de cette épreuve est constitué de deux parties indépendantes : la première partie est notée sur **4 points**, la deuxième sur **16 points**.

Partie 1

Mesure de la vitesse d'un vélo

Le système d'assistance électrique P.A.S. (Power Assist System) d'un vélo comporte un moteur à courant continu monté sur l'axe de pédalier. Ce moteur n'est là que pour aider le cycliste à pédaler. Il s'arrête si le cycliste arrête de pédaler, actionne l'un des freins ou si la vitesse du vélo atteint 25km.h^{-1} .

Un capteur magnétique placé sur un rayon de la roue du vélo permet de mesurer la fréquence de rotation f_r de la roue de rayon $r = 33\text{cm}$ en délivrant un signal impulsion à chaque tour de celle-ci. La vitesse du vélo v en fonction de f_r est donnée par $v(\text{km.h}^{-1}) = 7,46 f_r (\text{Hz})$.

1. Le signal impulsion délivré par le capteur est appliqué à un circuit monostable qui fournit la tension $u_1(t)$ représentée sur la figure 1.

- 1.1. Montrer que la valeur moyenne de $u_1(t)$ en fonction de f_r (Hz) est donnée par : $U_0 = \langle u_1 \rangle = k f_r$. Exprimer la constante k et préciser son unité.

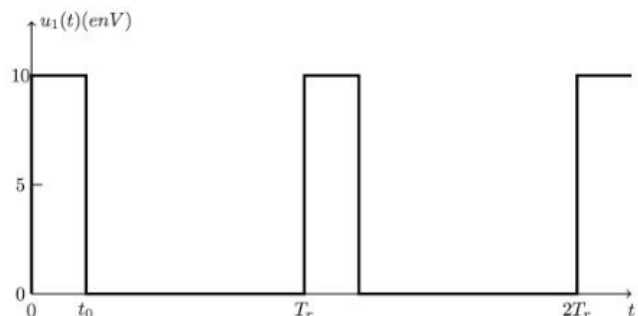


Figure 1 ($t_0 = 0,1\text{s}$)

- 1.2. Déterminer la vitesse maximale $v_{\max}$ mesurable en km.h^{-1} .

1.3. La décomposition en série de Fourier du signal obtenu est :

$u_1(t) = U_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} U_n \cos(2\pi n f_r t + \varphi_n)$. On souhaite extraire la valeur moyenne de la tension $u_1(t)$. Quel type de filtre doit-on choisir ?

2. On utilise le filtre représenté par le montage de la figure 2, où l'amplificateur opérationnel est supposé idéal et fonctionnant en régime linéaire.

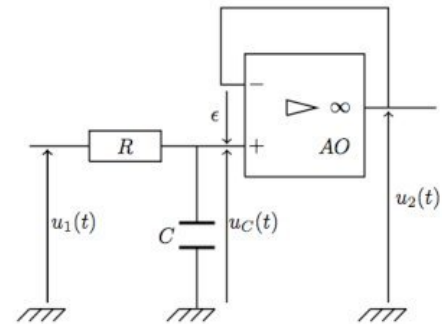


Figure 2

2.1. Justifier le mode de fonctionnement de l'amplificateur opérationnel ?

2.2. Établir la relation entre $u_2(t)$ et $u_C(t)$.

2.3. Établir la relation entre $u_C(t)$ et $u_1(t)$.

2.4. En déduire que la fonction de transfert du filtre s'écrit sous la forme $\underline{H}(jf_r) = \frac{H_0}{1 + j \frac{f_r}{f_0}}$. Exprimer H_0 et f_0 en fonction des données du montage.

2.5. Vérifier que cette fonction de transfert est cohérente avec la réponse à la question **1.3**.

2.6. On suppose que le filtre ne laisse pas passer les harmoniques de fréquences supérieures à $f_0 = 0,1 \text{ Hz}$. Donner l'expression de la tension $u_2(t)$ lorsque $T_r = 0,1 \text{ s}$.

Partie 2

Vélo à assistance électrique

1. Étude du mouvement du vélo

On étudie le mouvement d'un vélo dans le référentiel $(R) = (O, x, y, z, t)$ lié au sol auquel on associe la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et que l'on suppose galiléen. On modélise un vélo se déplaçant sur le sol horizontal modélisé par l'axe (Ox) tout en restant dans le plan vertical (Oxz) (figure 3) par trois éléments :

- Deux roues identiques, une roue avant (R_1) de centre C_1 et une roue arrière (R_2) de centre C_2 , de même rayon r et de masse négligeable. On note I_1 et I_2 les points de contact, supposé ponctuel, des roues avec le sol.
- L'ensemble $(S) = \{\text{cadre} + \text{cycliste}\}$ de masse M est modélisé par une barre homogène de longueur $2l$, d'extrémité C_1 et C_2 . Le centre de masse C du cycliste est donc entre les deux roues, au milieu de $[C_1 ; C_2]$ ce qui est peu réaliste mais qui ne modifie pas les résultats de l'étude. Le mouvement est paramétré par $x(t)$, abscisse de C .

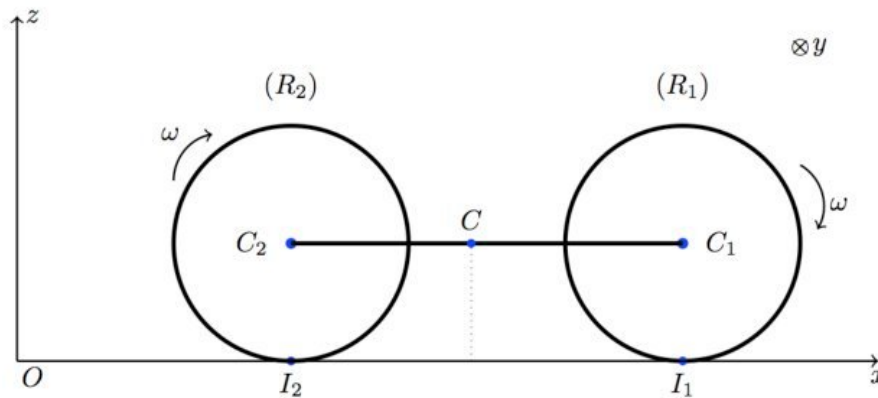


Figure 3

On note $\vec{R}_1 = T_1 \vec{e}_x + N_1 \vec{e}_z$ et $\vec{R}_2 = T_2 \vec{e}_x + N_2 \vec{e}_z$ les réactions de contact en I_1 et I_2 . Les roues sont articulées sur des pivots parfaits (C_1, y) et (C_2, y) aux extrémités de la barre $C_1 C_2$. On néglige la résistance de l'air sur le système total par $(\Sigma) = \{\text{cadre, cycliste, roues}\}$. L'accélération de pesanteur $\vec{g} = -g \vec{e}_z$ est supposée uniforme.

La vitesse et l'accélération de C dans (R) sont respectivement $\vec{v} = v \vec{e}_x$ et $\vec{a} = a \vec{e}_x$. On suppose le non-glissement sur les deux roues qui ont le même vecteur rotation $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_y$. Le cycliste peut exercer un couple $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{e}_y$ sur la roue arrière (R_2) par l'intermédiaire de la pédale.

1.1. Étude cinématique

On s'intéresse à la roue (R_1) seule. Cette roue roule sans glisser sur le sol modélisé par l'axe (Ox) tout en restant dans le plan vertical (Oxz) (figure 4). On désigne par P un point lié à la roue, situé sur la circonférence. Il coïncide à l'instant $t=0$ avec l'origine O du référentiel (R) ($\theta=0$).

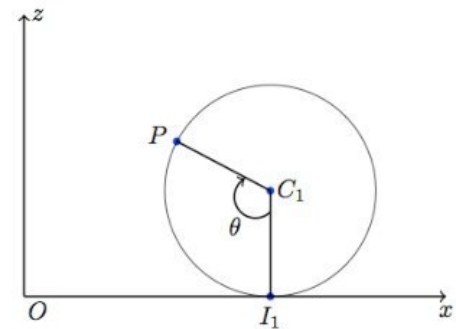


Figure 4

1.1.1. Préciser la nature de la trajectoire du point P dans le référentiel barycentrique lié à la roue ?

1.1.2. Déterminer les coordonnées du point P à l'instant t dans le référentiel (R) .

1.1.3. Exprimer le vecteur vitesse $\vec{v}(P/R)$ du point P dans le référentiel (R) .

1.1.4. Calculer le vecteur vitesse de glissement $\vec{v}_g$ de la roue par rapport au sol. En déduire la relation traduisant la condition de roulement sans glissement de la roue.

1.1.5. Représenter qualitativement l'allure de la trajectoire du point P dans le référentiel (R) . Comment s'appelle cette trajectoire ?

1.2. Étude dynamique

1.2.1. Dire, en justifiant, si le référentiel barycentrique $(R^*) = (C, x^*, y^*, z^*, t)$ lié au système (Σ) est galiléen ?

1.2.2. Comment interpréter le fait que le vélo se mette en mouvement ? Quelle est la résultante des forces intérieures qu'exerce le cycliste ? Quel est

leur rôle ? Quel est le rôle des forces de frottement solide ?

- 1.2.3. Écrire le théorème de la résultante cinétique pour le système (Σ) dans le référentiel (R) . En déduire deux équations scalaires.
- 1.2.4. Écrire le théorème du moment cinétique pour chaque roue dans le référentiel barycentrique (R^*) . En déduire deux équations scalaires.
- 1.2.5. Écrire le théorème du moment cinétique pour le système (Σ) dans le référentiel (R^*) . En déduire une équation scalaire.
- 1.2.6. Déterminer les expressions de T_1 , T_2 et l'accélération a en fonction de M , r et Γ .
- 1.2.7. Déterminer de même les expressions de N_1 et N_2 en fonction de M , g , r , l et a .
- 1.2.8. Le coefficient de frottement solide entre la roue et le sol est noté f . Montrer qu'il existe des valeurs limites a_1 et a_2 de l'accélération pour lesquelles le vélo peut respectivement basculer ou glisser. Préciser la roue concernée. Discuter de l'importance des divers facteurs et comparer les prévisions du modèle à des connaissances ou expériences personnelles.

2. Autonomie d'un éclairage pour vélo

De plus en plus de lampes pour vélo fonctionnent à partir de LED, une source lumineuse fondamentalement quantique. Une telle lampe consommant environ $P_e = 5W$ est alimentée par quatre piles rechargeables montées en série, chacune de f.é.m. $u = 1,5V$ et de capacité $q = 800mAh$.

Données :

- Constante de Planck : $h = 6,63 \cdot 10^{-34} J.s$.
- Vitesse de la lumière dans le vide : $c_0 = 3 \cdot 10^8 m.s^{-1}$.
- Charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$.

- 2.1. Calculer l'intensité I du courant électrique qui traverse la LED. En déduire le temps nécessaire Δt pour que la charge totale contenue dans les quatre piles soit consommée.
- 2.2. Exprimer la puissance lumineuse P_{lu} en fonction de l'énergie d'un photon et du flux de photons ϕ . On note λ_0 la longueur d'onde du rayonnement émis.
- 2.3. Sachant qu'on peut considérer que chaque électron passant dans la LED donne naissance à un photon, exprimer le flux des photons ϕ en fonction de l'intensité I et de la charge élémentaire e .
- 2.4. Sachant que la puissance électrique consommée par la LED est nécessairement plus grande que la puissance lumineuse qu'elle émet, montrer qu'il est nécessaire d'utiliser plusieurs piles pour que la lampe fonctionne. On donne $\lambda_0 = 600nm$.

3. Vélo à assistance électrique

Placé en prise directe dans le moyeu de l'une des deux roues, le moteur à courant continu à aimant permanent est monté sur une roue libre. Sa puissance nominale maximale est de $250W$. Le schéma équivalent de l'induit du moteur fonctionnant en régime permanent est donné par la figure 5. U est la tension aux bornes de l'induit, I est l'intensité du courant dans l'induit et R la résistance de

l'induite. La tension nominale d'induit délivrée par une batterie Lithium-ion est

$U_N = 36V$, l'intensité nominale d'induit est $I_N = 8,2A$. La résistance d'induit est $R = 0,66\Omega$. La vitesse de rotation nominale du moteur est $\Omega_N = 3000 \text{tr.min}^{-1}$.

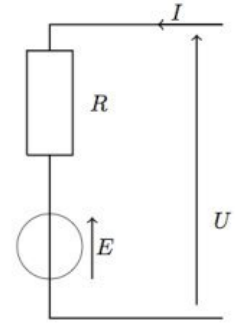


Figure 5

- 3.1. Exprimer la force électromotrice E , en fonction de U , I et R . Calculer numériquement E pour le fonctionnement nominal.
- 3.2. Calculer la puissance absorbée P_a pour le moteur pour le régime nominal.
- 3.3. Montrer que la f.é.m. E s'écrit sous la forme $E = k'\Omega$, Ω étant la vitesse angulaire du moteur. Calculer la valeur de la constante k' .
- 3.4. Exprimer la puissance électromagnétique P_{em} . En déduire que le moment du couple électromagnétique du moteur Γ_{em} est donné par $\Gamma_{em} = k'I$.
- 3.5. Exprimer le moment du couple utile Γ_u sur l'arbre moteur en fonction de I . Calculer sa valeur pour le fonctionnement nominal. On néglige les pertes collectives.
- 3.6. Calculer la puissance utile P_u du moteur. En déduire le rendement η du moteur.
- 3.7. En admettant qu'il y a conservation de la puissance mécanique et sachant que la vitesse de rotation de la roue après réducteur pour le fonctionnement nominal du moteur est $\Omega_r = \frac{\Omega_N}{15}$, calculer le moment Γ_r du couple transmis à la roue. Conclure.
- 3.8. Un accumulateur composé de trois batteries identiques en série de f.é.m. totale $U_b = 36V$ et un hacheur série H assure l'alimentation du moteur (figure 6). Le hacheur est commandé par la tension de rapport cyclique α représentée par la figure 1. L'inductance L permet de lisser le courant du moteur : $\langle i_L \rangle = I_N = 8,2A$.

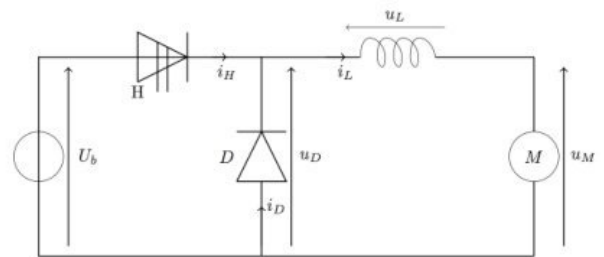


Figure 6

- 3.8.1. Proposer deux composants électroniques qui pourraient être utilisés comme interrupteur commandé.
- 3.8.2. Expliquer le rôle de la diode D ?
- 3.8.3. Exprimer la tension $u_D(t)$ lorsque H est passant puis lorsqu'il est bloqué.
- 3.8.4. Tracer l'allure de $u_D(t)$. Calculer sa valeur moyenne $\langle u_D(t) \rangle$ pour $\alpha = 0,6$.
- 3.8.5. Déterminer la relation entre la tension moyenne $\langle u_M \rangle$ aux bornes du moteur, α et U_b .
- 3.9. La commande du moteur est assurée par un comparateur simple à amplificateur opérationnel considéré parfait et de tensions de saturation $\pm V_{sat} = \pm 15V$.

La tension de référence V_{ref} appliquée à l'entrée inverseuse de l'amplificateur est réglable à partir de la tension d'alimentation $V_{CC} = +15V$ à l'aide d'un potentiomètre P de $10k\Omega$. À l'entrée non inverseuse de l'amplificateur, on applique la tension triangulaire $v_e(t)$ de la figure 7.

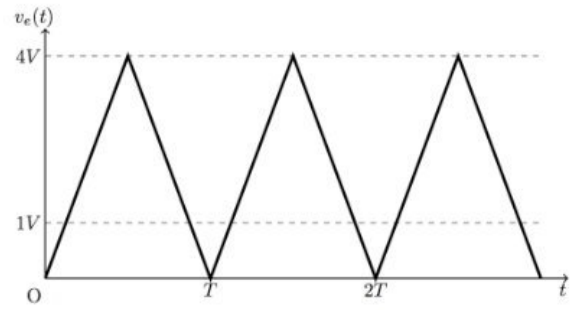


Figure 7

- 3.9.1.** Dessiner le schéma du montage réalisant la commande du moteur.
- 3.9.2.** Donner, en justifiant, les valeurs de $v_s(t)$, tension de sortie du comparateur.
- 3.9.3.** On prend $V_{ref} = 1,6V$. Reproduire le graphe de $v_e(t)$ et tracer V_{ref} et $v_s(t)$. Déterminer la valeur du rapport cyclique α_s de $v_s(t)$.
- 3.9.4.** Encadrer V_{ref} pour faire varier le rapport cyclique α_s de 0 à 1.
- 3.10.** Un cycliste, de puissance constante $P_c = 100W$, utilise son vélo électrique sur une pente ascendante constante. Le moteur fournit 50% de sa puissance nominale. On suppose que le moment du couple utile du moteur est constant et vaut $\Gamma_u = 0,8N.m$ et que l'intensité du courant du moteur est constante et vaut $I_N = 8,2A$. On donne $\alpha = 0,6$.

Calculer : la tension du moteur $U_M = \langle u_D \rangle$, la f.é.m. de moteur E_M , la vitesse angulaire du moteur Ω_M , la fréquence de rotation du moteur $f_M(tours.s^{-1})$, la fréquence de rotation de la roue $f_r(tours.s^{-1})$, la vitesse du vélo $v(km.h^{-1})$ et la puissance du moteur P_u .