

- On veillera à une présentation et une rédaction claires et soignées des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.
- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant clairement les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'épreuve se compose de deux problèmes indépendants.

1^{er} Problème

Thermodynamique

1^{ère} partie : étude d'une cogénération

Données :

- Constante des gaz parfaits : $R = 8,32 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$;
- Masse molaire de l'air : $M_{\text{air}} = 29,0 \text{ g.mol}^{-1}$;
- Masse molaire du méthane : $M_{\text{m}} = 16,0 \text{ g.mol}^{-1}$;
- Masse molaire de l'eau : $M_{\text{e}} = 18,0 \text{ g.mol}^{-1}$;
- Capacité thermique massique de l'eau supposée constante : $c_e = 4,18 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$;
- $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$.

La cogénération est une technique qui consiste à produire, avec une même machine et à partir d'un seul combustible (en général le gaz naturel), de l'électricité et de la chaleur. Elle permet d'obtenir un rendement global (électricité-thermique) plus élevé que celui résultant d'une production par filière séparée. L'économie d'énergie primaire est de l'ordre de 20 %.

Le synoptique de fonctionnement du dispositif est donné par la figure 1.

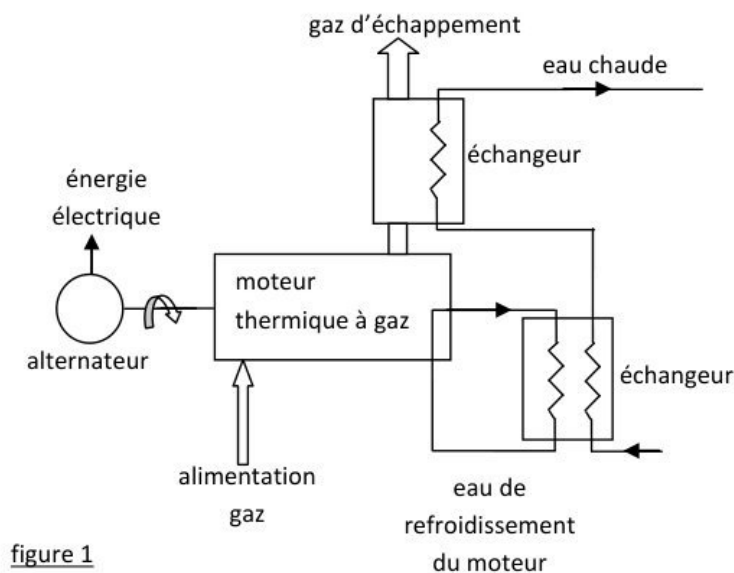


figure 1

Le moteur, alimenté en gaz naturel considéré comme du méthane, est couplé à un alternateur pour la fourniture du courant électrique. Les deux échangeurs thermiques

permettent de récupérer la chaleur dégagée par le moteur et les gaz d'échappement et produire l'eau chaude destinée au chauffage.

1.1. Généralités sur les moteurs thermiques

Un moteur ditherme est un système fermé échangeant un travail W avec l'extérieur, une chaleur Q_F avec une source froide (température T_F) et une chaleur Q_C avec une source chaude (température T_C).

1.1.1. Représenter par un schéma de principe un moteur ditherme en faisant apparaître, les sources de chaleur, et le sens des échanges d'énergie.

1.1.2. Exprimer le rendement η du moteur ditherme en fonction de Q_C et Q_F .

1.1.3. Quelle est l'expression du rendement maximal η_{max} du moteur ditherme dont le fonctionnement est décrit par le cycle de Carnot. On définira le cycle de Carnot.

1.1.4. Existe-t-il à priori, un moteur de plus grande performance, à T_F et T_C données ?

1.2. Second principe de la thermodynamique

1.2.1. Enoncer le second principe de la thermodynamique. Donner sa formulation mathématique. Expliquer pourquoi ce principe est un principe d'évolution.

1.2.2. Donner l'expression de la variation dS de l'entropie d'un gaz parfait au cours d'une transformation élémentaire en fonction de dT et dV .

1.2.3. On rappelle l'équation de Laplace liant la température T et le volume V pour un gaz parfait : $TV^{\gamma-1} = \text{constante}$. Retrouver cette relation et préciser les conditions de sa validité.

1.3. Etude du moteur thermique

Le moteur thermique de la cogénération, analogue à ceux des automobiles à essence, fonctionne selon le cycle théorique de Beau de Rochas :

- premier temps : de A à B , admission à pression constante $P_A = P_B = 2,00$ bar du mélange {air, gaz naturel}, à la température $T_B = 300$ K ;
- deuxième temps : de B à C , compression adiabatique réversible ;
- troisième temps :
 - de C à D , combustion interne du mélange à volume constant ;
 - de D à E , détente adiabatique réversible des gaz d'échappement ;
- quatrième temps :
 - de E à B , refroidissement isochore grâce aux échangeurs ;
 - de B à A , échappement des gaz brûlés à pression constante.

Le moteur est constitué de 16 cylindres représentant une cylindrée totale $V_B - V_A = 71,0$ L. Le rapport de compression volumétrique est $r_{cv} = V_B / V_A = 11,7$. La vitesse de rotation de son arbre est $\omega = 1500$ tours/min. Un cycle correspond à deux tours de l'arbre moteur.

Les transformations sont supposées quasi statiques. Les gaz sont assimilés à un gaz parfait dont le rapport des capacités thermiques massiques à pression et volume constants vaut $\gamma = c_p / c_v = 1,32$. On admet que la combustion ne modifie pas le nombre de moles de gaz.

1.3.1. Représenter l'allure du cycle dans le diagramme de Clapeyron $P = P(V)$. Placer sur ce diagramme les points A , B , C , D et E en précisant le sens de parcours du cycle.

1.3.2. Calculer la durée τ_c d'un cycle.

1.3.3. Calculer la masse m_{air} d'air admise dans les cylindres à chaque cycle. Pour faire ce calcul et uniquement pour cette question, on néglige la masse de gaz naturel introduite. En déduire le débit massique d'air d_{air} à l'admission.

1.3.4. Le débit massique de gaz naturel à l'admission est $d_{\text{gn}} = 7,80 \cdot 10^{-2} \text{ kg.s}^{-1}$ et le débit massique des gaz d'échappement est $d_{\text{ge}} = 2,140 \text{ kg.s}^{-1}$. En effectuant un bilan de masse, retrouver le débit massique d'air d_{air} à l'admission obtenu en question **1.3.3**.

1.3.5. Calculer la température T_C du mélange gazeux {air, gaz naturel} en fin de compression.

1.3.6. Calculer les nombres de moles de gaz naturel n_{gn} et d'air n_{air} admises dans les cylindres à chaque cycle.

1.3.7. Etablir l'expression puis calculer la valeur numérique du travail W_{BC} reçu par le mélange supposé idéal au cours de la compression pour un cycle.

1.3.8. La combustion interne du mélange libère une puissance thermique $P_C = 3470 \text{ kW}$. Le travail W_{DE} cédé par les gaz d'échappement au cours de la détente pour un cycle est $W_{DE} = -155,1 \text{ kJ}$.

1.3.8.1. Calculer le rendement thermodynamique η du moteur.

1.3.8.2. Sachant que l'alternateur produit $P_E = 1200 \text{ kW}$ de puissance électrique, calculer le rendement η_{CE} de la conversion énergie chimique de combustion $\rightarrow$ énergie électrique.

1.4. Etude des échangeurs thermiques

1.4.1. Le premier échangeur, haute température, refroidit directement le moteur grâce à une circulation d'eau sous pression qui rentre dans le moteur à $\theta_e = 82^\circ \text{C}$ et en sort à $\theta_s = 92^\circ \text{C}$. Etablir l'expression de la puissance thermique P_{th} récupérée par l'eau grâce à cet échangeur. En déduire le débit volumique D_e de l'eau dans l'échangeur pour récupérer une puissance thermique $P_{th} = 656 \text{ kW}$. On donne la masse volumique de l'eau à la température moyenne d'échange $\mu_e = 968 \text{ kg.m}^{-3}$.

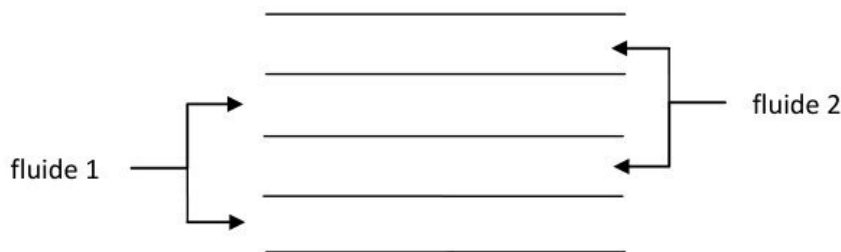


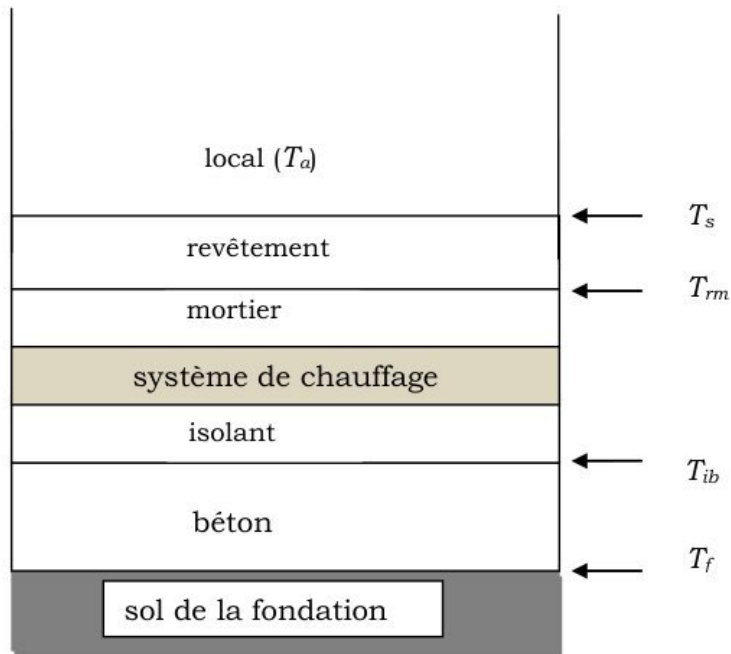
figure 2

1.4.2. Le deuxième échangeur, basse température, est un échangeur à plaques où les gaz d'échappement et l'eau circulent à contre courant. Il permet de récupérer une puissance thermique $P'_{th} = 967 \text{ kW}$. Expliquer qualitativement pourquoi la circulation des fluides à contre-courant (figure 2) augmente l'efficacité de l'échangeur par rapport à une circulation à co-courant. Tracer l'allure des graphes donnant l'évolution de la température le long de l'échangeur pour chaque fluide. On les notera T_{f1} et T_{f2} .

1.4.3. Calculer le rendement η_e de la conversion énergie chimique de combustion $\rightarrow$ énergie thermique pour les deux échangeurs.

2^{ème} partie : chauffage d'un local

On désire maintenir la température ambiante à $T_a = 20\text{ °C}$ dans un local. On incorpore dans le plancher du local de surface $S = 16\text{ m}^2$ un système de chauffage constitué d'un tube dans lequel circule l'eau (sortant du deuxième échangeur étudié dans la question **1.4.2.**) à température moyenne supposée constante $T_e = 40\text{ °C}$.



figure

Le plancher est composé d'un revêtement de conductivité thermique $\lambda_r = 2,5\text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$ et d'épaisseur $e_r = 1,0\text{ cm}$, d'une couche de mortier de conductivité thermique $\lambda_m = 1,12\text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$ et d'épaisseur $e_m = 5,0\text{ cm}$, d'une couche d'isolant de conductivité thermique $\lambda_i = 0,020\text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$ et d'épaisseur $e_i = 2,0\text{ cm}$, d'une couche de béton de conductivité thermique $\lambda_b = 1,4\text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$ et d'épaisseur $e_b = 10\text{ cm}$. Le sol de la fondation a une température $T_f = 7\text{ °C}$ supposée parfaitement uniforme.

Le coefficient d'échange conducto-convectif entre la surface du revêtement du plancher et l'air du local est $h = 10\text{ W.m}^{-2}\text{.K}^{-1}$.

On néglige les phénomènes de rayonnement thermique.

En un point M à l'instant t , la loi de *Fourier* lie le vecteur densité de flux thermique $\vec{J}_{th}$ au gradient de la température $T(M, t)$: $\vec{J}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T(M, t))$, λ étant la conductivité thermique du milieu supposée constante.

2.1. Quelle est la signification du vecteur $\vec{J}_{th}$? Préciser son unité. Justifier physiquement le signe "moins" dans cette loi.

2.2. En développant clairement l'analogie thermo-électrique, définir et exprimer la résistance thermique R_{th} d'un milieu matériel ayant la forme d'une plaque parallélépipédique de surface S et d'épaisseur e . Donner son unité.

2.3. Une surface S_0 d'un milieu matériel à la température T_i , en contact avec un fluide à la température T_f , échange par conducto-convection avec le fluide une puissance thermique P_{th} (sortant algébriquement de la surface S_0) telle que : $P_{th} = hS_0(T_i - T_f)$. h est le coefficient d'échange conducto-convectif entre la surface du milieu et le fluide. Exprimer comme dans la question **2.2.** la résistance thermique de convection R'_{th} traduisant cet échange conducto-convectif.

2.4. Etablir l'expression puis calculer la valeur numérique du flux thermique surfacique φ_h émis vers le haut par le système de chauffage en fonction de T_a , T_e et des constantes.

2.5. Etablir l'expression puis calculer la valeur numérique du flux thermique surfacique φ_b émis vers le bas par le système de chauffage en fonction de T_f , T_e et des constantes.

2.6. En déduire la puissance thermique perdue P_p , la puissance thermique reçue P_r par le local et la puissance thermique fournie P_f par le système de chauffage.

2.7. Calculer numériquement les températures T_s , T_{rm} et T_{ib} .

2.8. On désire limiter les pertes vers le sol de la fondation à 10 % de la puissance utile. On supposera ces pertes égales à $P'_p = 0,22$ kW. On conserve le même isolant et la même épaisseur de béton. Calculer la nouvelle épaisseur e'_3 de l'isolant.

2.9. Calculer la nouvelle puissance fournie P'_f par le système de chauffage.

2^{ème} problème

Electromagnétisme

Le présent problème propose l'étude de la diffusion du rayonnement solaire par les électrons des particules atmosphériques. On commence tout d'abord par étudier le dipôle électrique oscillant. Aucune connaissance sur le rayonnement dipolaire n'est nécessaire pour traiter la première partie de ce problème.

Il est à signaler que les parties composant ce problème sont largement indépendantes entre elles.

Données :

- Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3.10^8$ m.s⁻¹ ;
- $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m⁻¹ ;
- $\mu_0\epsilon_0c^2 = 1$;
- Charge élémentaire : $e = 1,6.10^{-19}$ C ;
- Masse de l'électron : $m = 9,1.10^{-31}$ kg ;
- Nombre d'Avogadro : $N_A = 6,02.10^{23}$ mol⁻¹ ;
- Domaine du visible : $\lambda_B = 0,4$ μ m pour le bleu et $\lambda_R = 0,8$ μ m pour le rouge ;
- Constante des gaz parfaits : $R = 8,32$ J. K⁻¹.mol⁻¹ ;
- 1 bar = 10^5 Pa ;
- $\int_0^\pi (\sin(\theta))^3 d\theta = \frac{4}{3}$;

- Les vecteurs $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ désignent les vecteurs unitaires selon les axes Ox, Oy, Oz du repère $R(O, x, y, z)$. Les vecteurs $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ désignent les vecteurs unitaires de la base associée aux coordonnées sphériques (r, θ, φ) d'un point M de l'espace.

1. Dipôle électrique oscillant

On modélise un dipôle électrique oscillant par une charge $-q$ fixe à l'origine O du référentiel $R(O, x, y, z)$ et par une charge $+q$ au point P de l'axe Oz . La charge $+q$ est animée le long de cet axe d'un mouvement sinusoïdal de pulsation ω et d'équation :

$$z(t) = a \cos(\omega t) = R_e \left(a \exp[-j\omega t] \right), \quad a > 0 \text{ et } j^2 = -1.$$

On définit, en régime variable, le moment dipolaire du dipôle électrique oscillant par $\vec{p}(t) = p(t)\vec{e}_z$, avec $p(t) = p_0 \cos(\omega t)$ et $p_0 = qa$.

Le calcul du champ électromagnétique $(\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t))$ créé par le dipôle $\vec{p}(t)$ en un point M de coordonnées sphériques (r, θ, φ) donne, en notation complexe et dans les conditions où $r \gg a$, $\lambda \gg a$ et $r \gg \lambda$; λ étant la longueur d'onde associée à l'onde électromagnétique émise par le dipôle :

$$-\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r c} \sin(\theta) \exp[-j(\omega t - kr)] \vec{e}_\varphi \text{ et } -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r} \sin(\theta) \exp[-j(\omega t - kr)] \vec{e}_\theta$$

k est le module d'onde associé à l'onde électromagnétique émise. On pose $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$ avec c la vitesse de l'onde dans le vide.

1.1. Commenter qualitativement les deux approximations : $r \gg a$ et $\lambda \gg a$.

1.2. Justifier le terme kr dans la phase instantanée du champ électromagnétique.

1.3. Identifier parmi les deux expressions ci-dessus, celle du champ électrique $\vec{E}(M, t)$ et celle du champ magnétique $\vec{B}(M, t)$. Justifier votre réponse.

1.4. Donner l'expression de l'amplitude $E_m(r, \theta)$ du champ électrique en un point M en fonction de r et θ .

1.5. Que vaut le rapport $\frac{E}{B}$? Montrer que le champ électromagnétique défini dans la question **1.3.** a localement la structure d'une onde électromagnétique plane progressive. Préciser sa direction de propagation et son état de polarisation.

1.6. Calculer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}_e$ correspondant à l'onde émise dans la zone de rayonnement ainsi que sa valeur moyenne $\langle \vec{\Pi}_e \rangle$ dans le temps. Montrer que cette moyenne s'écrit sous la forme $\langle \vec{\Pi}_e \rangle = \frac{1}{8} \mu_0 c \left(\frac{p_0}{\lambda r} \right)^2 \vec{e}_r$. Exprimer la grandeur I_m en fonction de a , ω et p_0 et donner son unité. Décrire la variation spatiale de $\langle \Pi_e \rangle$, module de $\langle \vec{\Pi}_e \rangle$.

1.7. Calculer la puissance électromagnétique moyenne $\langle P_e \rangle$ rayonnée dans tout

l'espace à travers la sphère de centre O et de rayon r . On l'exprimera en fonction de I_m , λ , a , μ_0 et c , puis en fonction de $E_m(r) = E_m(r, \theta = \frac{\pi}{2})$, r , μ_0 et c .

1.8. On définit la résistance de rayonnement du dipôle par la résistance R_e du conducteur ohmique qui, parcouru par un même courant de valeur maximale I_m , dissiperait la même puissance par effet Joule. Donner l'expression de R_e en fonction de λ , a , μ_0 et c .

1.9. Sachant que l'amplitude du champ électrique détecté par un récepteur situé à la distance r , dans le plan xOy , est $E_m(r)$, calculer la puissance $\langle P_e \rangle$ nécessaire d'émission pour $r = 10$ km puis pour $r = 1000$ km. On donne : $E_m(r) = 10^{-3} V.m^{-1}$.

2. Diffusion d'un rayonnement par un électron atomique

La diffusion d'un rayonnement électromagnétique incident par un électron atomique constitue un exemple important de rayonnement dipolaire. Elle permet d'expliquer la couleur bleue du ciel diurne et la couleur rouge du Soleil couchant, ainsi que d'autres phénomènes physiques. Pour expliquer cette diffusion, on propose le mécanisme suivant : le champ électrique du rayonnement émis par le Soleil interagit avec les molécules de l'atmosphère qui se comportent comme des dipôles électriques induits. Ces dipôles oscillants rayonnent à leur tour des ondes électromagnétiques dans toutes les directions, on dit que la lumière incidente est diffusée. Pour étudier quantitativement la diffusion de cette lumière par le milieu, on utilise le modèle classique de Lorentz (ou modèle de l'électron élastiquement lié). Dans ce modèle, on suppose le noyau de l'atome immobile en O et on repère l'électron de masse m et de charge $q = -e$ par le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

Un électron atomique d'une molécule constituant l'atmosphère est mis en mouvement sous l'action d'une onde électromagnétique incidente plane progressive monochromatique dont le champ électrique est pris en notation complexe $\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \cos[\omega t - kx]$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ est le module d'onde et λ la longueur d'onde. Le

vecteur position de l'électron vérifie l'équation : $m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{m}{\tau} \frac{d\vec{r}}{dt} + m\omega_0^2 \vec{r} = -e\vec{E}$, ω_0 et τ sont des constantes positives.

2.1. Interpréter les différents termes de cette équation. Que représentent ω_0 et τ ?

2.2. Justifier pourquoi la force magnétique est négligeable devant la force électrique.

2.3. Montrer qu'à l'échelle du déplacement de l'électron, on peut considérer que le champ électrique $\vec{E}(M, t)$ est uniforme.

2.4. Etablir, en régime sinusoïdal forcé, l'expression du vecteur position $\vec{r}$ de l'électron. En déduire l'expression du moment dipolaire $\vec{p}_{in}(t)$ induit.

2.5. On admet que la puissance électromagnétique moyenne rayonnée par un dipôle électrique de moment $\vec{p}(t) = p_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$ est $P = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}$. Déterminer l'expression de la puissance électromagnétique moyenne P rayonnée par le dipôle induit $\vec{p}_{in}(t)$.

2.6. Etablir l'expression de la puissance électromagnétique moyenne surfacique P_i de l'onde électromagnétique incidente.

2.7. On introduit la grandeur $\sigma(\omega)$ définie par $\sigma(\omega) = \frac{P}{P_i}$. Montrer que $\sigma(\omega)$ se met

sous la forme : $\sigma(\omega) = \sigma_0 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}$, avec $\sigma_0 = \frac{8}{3} \pi r_e^2$ et $r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}$. Quelle est la

dimension de $\sigma(\omega)$?

2.8. Représenter l'allure de $\sigma(\omega)$. On suppose $\omega_0 \gg \frac{1}{\tau}$.

2.9. L'allure représentée dans la question **2.8.** permet de distinguer trois domaines :

2.9.1. Diffusion résonnante ($\omega \approx \omega_0$)

Montrer que dans ce cas, $\sigma(\omega)$ présente le profil *Lorentzien* $L(\omega) = \frac{1}{1 + 4\tau^2(\omega - \omega_0)^2}$

caractéristique d'une résonance.

2.9.2. Diffusion Thomson ($\omega \gg \omega_0$)

Montrer que dans le cas d'un électron faiblement lié, $\sigma(\omega)$ est constant. En déduire que la puissance diffusée est indépendante de la fréquence de l'onde incidente. A quel rayonnement s'applique ce résultat ?

Application numérique : Donner un ordre de grandeur de $\sigma(\omega)$.

2.9.3. Diffusion Rayleigh ($\omega \ll \omega_0$)

2.9.3.1. Montrer que dans le cas d'un électron très fortement lié, la grandeur $\sigma(\omega)$ est égale à $\sigma_0 \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^4$ où λ_0 et λ sont les longueurs d'onde associées respectivement à ω_0 et ω .

2.9.3.2. Le Soleil est l'émetteur des ondes électromagnétiques excitatrices des molécules atmosphériques. La lumière qu'il émet est polychromatique. Pourquoi peut-on prendre le champ électrique $\vec{E}(x, y, z, t)$ monochromatique dans l'équation différentielle du mouvement de l'électron ?

2.9.3.3. Sachant que, dans l'atmosphère, les électrons atomiques vibrent avec une fréquence de l'ordre de 10^{17} Hz, justifier l'approximation $\omega \ll \omega_0$. Déduire :

- une explication à la couleur bleue du ciel dans la journée.
- une explication à la couleur rouge du ciel le soir.

2.9.3.4. On suppose que l'atmosphère comporte n molécules par unité de volume dont les rayonnements sont incohérents entre eux de telle sorte que la puissance totale moyenne diffusée par unité de volume de l'atmosphère est $P_d = n\sigma(\omega)P_{i\lambda}(x)$, x étant la direction de propagation de la lumière solaire et $P_{i\lambda}(x)$ la puissance moyenne surfacique de l'onde électromagnétique incidente de longueur d'onde λ en x .

2.9.3.4.1. Justifier la diminution de puissance moyenne surfacique $P_{i\lambda}(x)$ du faisceau lumineux solaire le long de l'axe de propagation. Cette diminution est-elle la même pour toutes les longueurs d'onde ?

2.9.3.4.2. Montrer en faisant le bilan des puissances dans un petit cylindre de base S et de longueur dx suivant la direction de propagation, que l'intensité à la traversée d'une couche diffusante d'épaisseur dx s'écrit : $P_{i\lambda}(x) = P_{i\lambda}(0)e^{-\frac{x}{H_\lambda}}$. Exprimer H_λ en fonction de n , σ_0 et λ/λ_0 . On suppose que la densité n est constante.

2.9.3.4.3. Application numérique : Calculer la valeur numérique de n pour l'air assimilé à un gaz parfait à la surface de la terre dans les conditions normales de température et de pression, puis calculer $H_{\lambda B}$ pour la couleur bleue et $H_{\lambda R}$ pour la couleur rouge. En déduire la couleur dominante du ciel en plein jour et par temps clair, puis la couleur du soleil au coucher.

2.9.3.5. Pourquoi, sur la lune, le ciel paraît-il noir ?