

- On veillera à une présentation et une rédaction claires et soignées des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.
- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant clairement les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- Toutes les réponses devront être très soigneusement justifiées.
- Si un résultat donné par l'énoncé est non démontré, il peut néanmoins être admis pour les questions suivantes. Ainsi, les diverses parties du problème sont relativement indépendantes entre elles.

L'épreuve se compose de deux problèmes indépendants.

Problème I – Etude d'un pendule

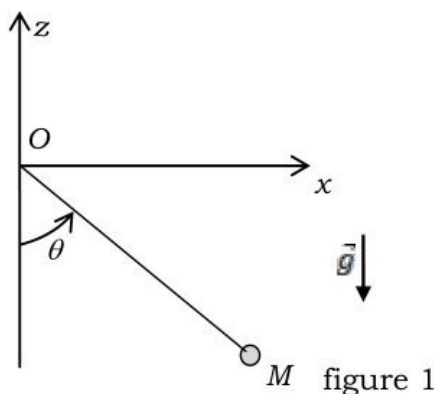
On considère un pendule simple (P), dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$ uniforme, constitué d'une masse m ponctuelle, accrochée en M au bout d'un fil inextensible de masse négligeable et de longueur $l = OM$.

Le point O est fixe et est confondu avec l'origine du référentiel terrestre $R(O, x, y, z, t)$ supposé galiléen.

On repère la position du pendule par rapport à l'axe vertical par l'angle θ (figure 1).

Le pendule est abandonné avec les conditions initiales $\theta(t=0) = \theta_0$ et $\frac{d\theta}{dt}(t=0) = 0$.

On néglige tout frottement et on étudie le mouvement du pendule dans le plan vertical (Ox, Oz).

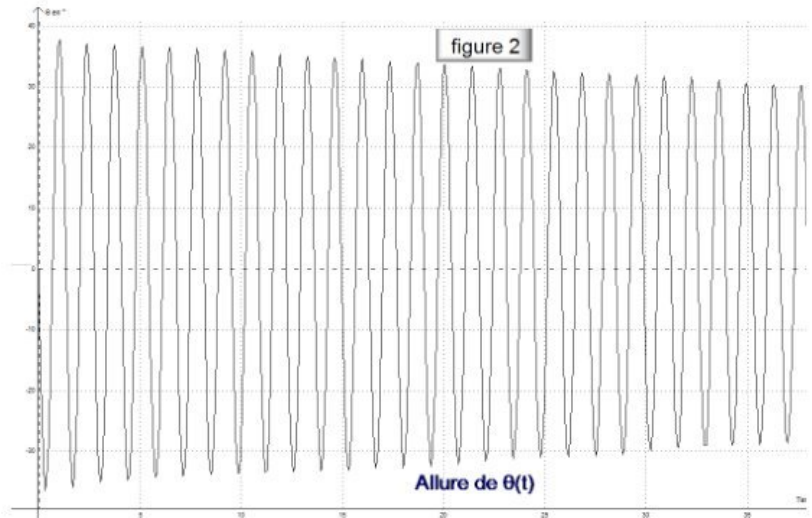


1. Qu'appelle-t-on un référentiel galiléen ? Le référentiel terrestre est-il galiléen ? Si non, à quelle condition sur la durée de l'expérience, le référentiel terrestre peut-il être considéré comme galiléen ?
2. Faire le bilan des forces appliquées à la masse m . Calculer le travail de chaque force. En déduire que le système étudié est conservatif et exprimer son énergie potentielle E_p et son énergie mécanique E_m . On prend $E_p(\theta=0) = 0$.
3. A quelle condition sur E_m , le mouvement du pendule a-t-il lieu ?
4. Montrer que si $E_m < 2mgl$, le mouvement du pendule est oscillatoire et ne peut avoir lieu que si $\theta \in [-\theta_m, +\theta_m]$. Exprimer sa période $T(\theta_m)$ sous forme d'une intégrale en précisant les bornes d'intégration.
5. Quel est la nature du mouvement dans le cas $E_m > 2mgl$?
6. Etablir l'équation différentielle du mouvement de la masse m . Le pendule étudié est-il un système linéaire ? Justifier.
7. Préciser ce qu'il est légitime d'appeler petites oscillations au voisinage de la position d'équilibre stable du pendule. Montrer que ces petites oscillations sont sinusoïdales et exprimer leur pulsation ω_0 et leur période T_0 en fonction des données. Que signifie l'expression *isochronisme* des petites oscillations ?

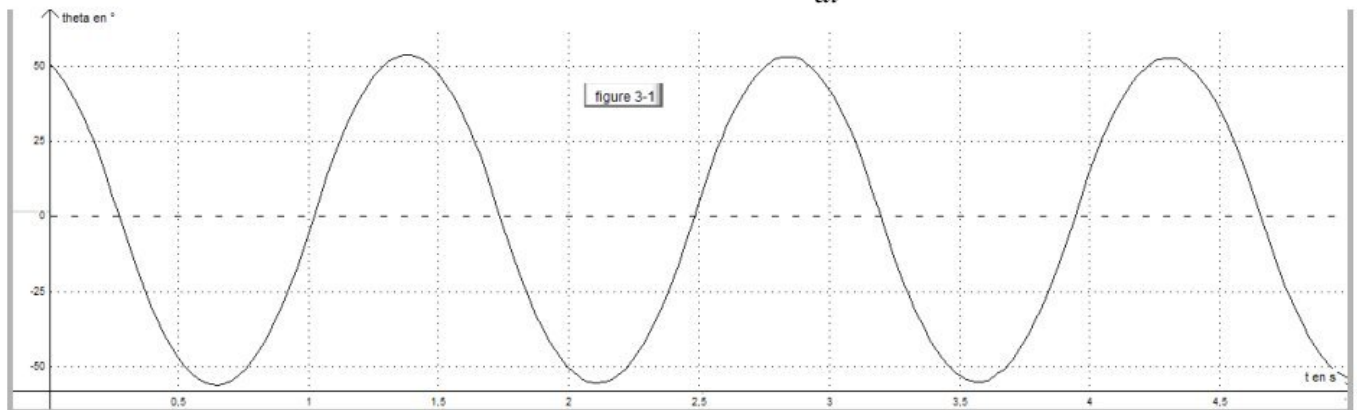
8. Quelle doit être la longueur l pour que le pendule batte la seconde ? On prendra $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$. Pourquoi ne peut-on pas prendre cette valeur comme unité de longueur officielle et internationale ?
9. On dispose d'une carte d'acquisition, d'un ordinateur équipé d'un logiciel de pilotage de la carte et d'un potentiomètre linéaire. Proposer un montage simple permettant de visualiser la position angulaire $\theta(t)$ du pendule sur l'écran d'un ordinateur.

10. On fait l'expérience pour un temps d'acquisition très grand devant la période d'oscillation. On obtient le graphe de la figure 2. Commenter et justifier l'allure de $\theta(t)$.

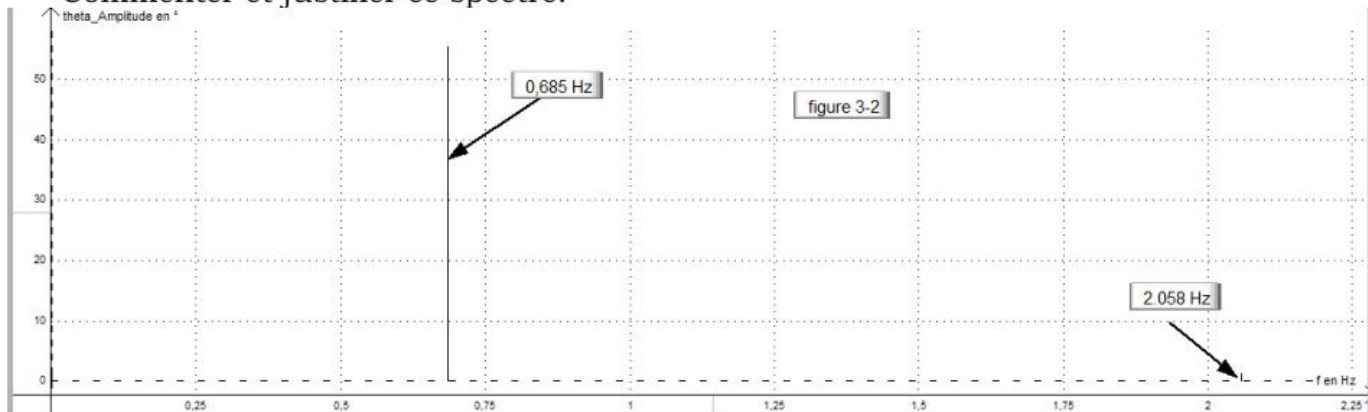
Pourquoi expérimentalement est-il souhaitable de prendre un temps d'acquisition ni trop petit, ni trop grand devant la période d'oscillation ?



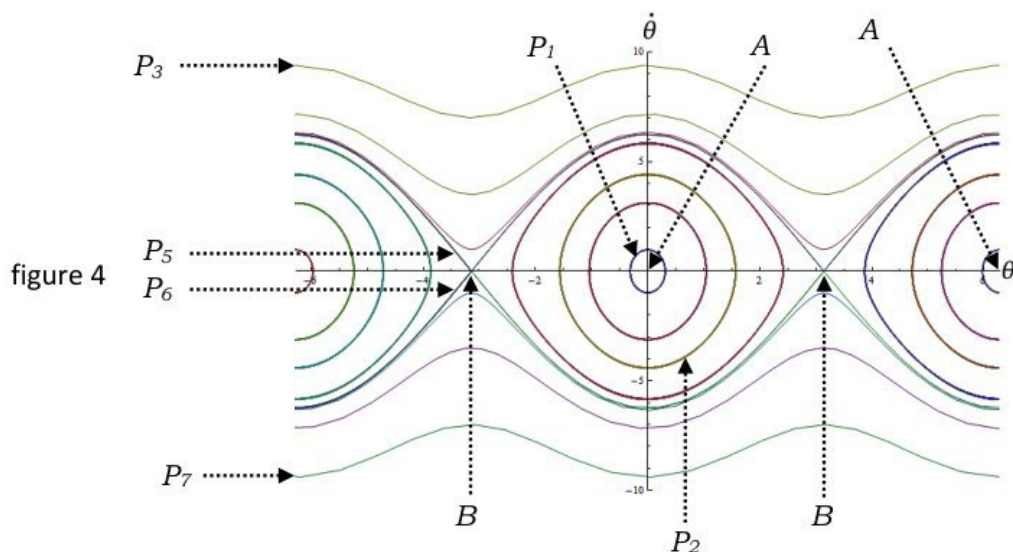
11. L'enregistrement informatisé de $\theta(t)$ pour un temps d'acquisition raisonnable est représenté par la figure 3-1 pour $\theta(t=0) = 55^\circ$ et $\frac{d\theta}{dt}(t=0) = 0$.



- 11.1. A partir de la figure, déterminer la période T correspondante du pendule. Commenter en comparant à la valeur théorique $T_0 = 1,39 \text{ s}$.
- 11.2. L'analyse spectrale de la fonction $\theta(t)$ donne le spectre de la figure 3-2. Commenter et justifier ce spectre.



- 12.** Le pendule (P) oscille maintenant avec une amplitude telle que $\sin(\theta) \approx \theta - \frac{\theta^3}{6}$.
- 12.1.** Que devient, dans ce cas, l'équation différentielle du mouvement obtenue dans la question **6** ?
- 12.2.** On cherche à évaluer la partie principale de l'écart au modèle de la question **7** en cherchant une solution de l'équation du mouvement de la masse m sous la forme (méthode de perturbation) : $\theta(t) = \theta_0 (\cos(\omega t) + \varepsilon(t))$ avec $\varepsilon(t) \ll 1 \quad \forall t$.
- 12.2.1.** Quelle est, dans cette solution, la pulsation fondamentale ?
- 12.2.2.** En reportant cette expression de $\theta(t)$ dans l'équation du mouvement de la masse m et en faisant les approximations convenables, montrer que le caractère non-harmonique des oscillations du pendule entraîne la présence dans la perturbation $\theta_0 \varepsilon(t)$ d'une harmonique de la solution non perturbée. Déterminer explicitement cette harmonique.
- On donne : $\cos^3(\theta) = \frac{1}{4}(\cos(3\theta) + 3\cos(\theta))$.
- 12.3.** On cherche maintenant $\varepsilon(t)$ sous la forme $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(3\omega t)$ où ε_0 est une constante $\varepsilon_0 \ll 1$. Déterminer ε_0 et exprimer la pulsation ω . Montrer que la période $T(\theta_0)$ est donnée par $r(\theta_0) = \frac{T(\theta_0)}{T_0} = 1 + \frac{\theta_0^2}{16}$. Application numérique : Calculer $r(\theta_0)$ pour $\theta_0 = 60^\circ$. Le calcul exact donne $r(60^\circ) = 1,073$. Commenter.
- 13.** On se place maintenant dans le cas d'oscillations d'amplitude quelconque.
- 13.1.** Montrer que l'équation de la trajectoire dans le plan de phase du point P de coordonnées $\theta(t)$ et $\frac{1}{\omega_0} \frac{d\theta}{dt}$ peut se mettre sous la forme :
- $$\left(\frac{1}{\omega_0} \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + 2(1 - \cos(\theta)) = 2 \frac{E_m}{mgl}.$$
- 13.2.** L'allure générale du portrait de phase du pendule étudié est donnée dans la figure 4 ci-dessous.



- 13.2.1.** Justifier que deux trajectoires de phase ne se coupent pas.
- 13.2.2.** A quelle situation correspondent les points A ?
- 13.2.3.** A quelle situation correspondent les points B ?

- 13.2.4.** Quelles sont les trajectoires de phase correspondant à la situation de la question 4. ?
- 13.2.5.** Quelles sont les trajectoires de phase correspondant à un mouvement révolutif ?
- 13.2.6.** Donner l'allure de la trajectoire de phase du pendule simple dans le plan de phase dans le cas des petites oscillations. Que devient cette allure si l'on modélise les frottements par une force orthoradiale $f = -\alpha \frac{d\theta}{dt}$?

14. Afin de construire un pendule isochrone, on propose de réduire la longueur utile du pendule en fonction de l'amplitude.

Pour cela, on réalise un pendule avec un guide AOB sur lequel le fil du pendule simple s'enroule. On dispose alors deux lamelles de forme cycloïdale à des positions symétriques et déterminées telles que représentées sur la figure 5. Les deux lamelles OA et OB sont appelées les joues du guide et ont la même longueur que le fil du pendule. A et B sont deux points des joues où la tangente est horizontale. Le profil du guide est défini en fonction du paramètre θ par les équations :

$$x_P(\theta) = R(2\theta - \sin(2\theta)) \text{ et }$$

$$z_P(\theta) = R(\cos(2\theta) - 1).$$

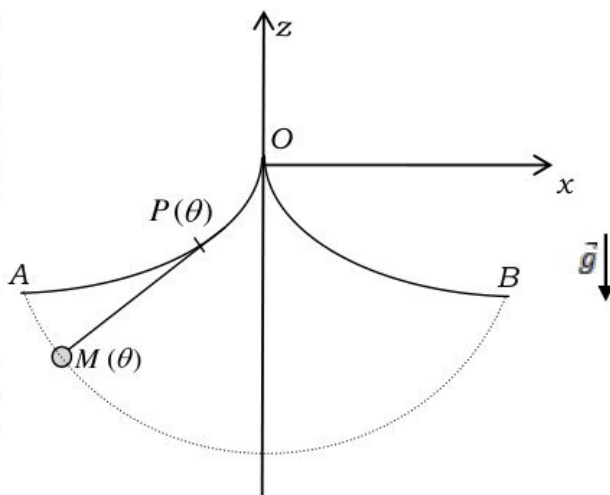


figure 5

A un instant donné, le fil du pendule est en contact avec la joue de O à $P(\theta)$, puis libre de $P(\theta)$ à $M(\theta)$. Le fil est tangent au profil de la joue en $P(\theta)$.

- 14.1.** Montrer que le paramètre θ qui définit la position du point $P(\theta)$ s'identifie à l'angle θ que fait la partie libre $P(\theta)M(\theta)$ du fil avec la verticale.
- 14.2.** Rappeler l'expression de la variation ds de l'abscisse curviligne s en fonction des variations dx et dz respectivement de x et z .
- 14.3.** Montrer que la variation de l'abscisse curviligne s entre O et A est $ds = 4R \sin(\theta) d\theta$, lorsque l'angle θ que fait la joue cycloïdale avec la verticale varie de $d\theta$.
- 14.4.** Exprimer la longueur $L(\theta)$ de la joue entre O et $P(\theta)$ et la longueur totale L de la joue entre O et A . En déduire que l'on peut exprimer θ en fonction de $L(\theta)$ sous la forme : $\theta = \arccos\left(1 - \frac{L(\theta)}{L}\right)$.
- 14.5.** Déterminer les coordonnées $x_M(\theta)$ et $z_M(\theta)$ définissant la position du point M . En déduire la nature de la trajectoire du point matériel de masse m .
- 14.6.** En écrivant la conservation de l'énergie mécanique, montrer que l'équation du mouvement de M s'écrit sous la forme : $\dot{\theta}^2 = \omega_0^2 \left(1 - \left(\frac{\cos(\theta_0)}{\cos(\theta)}\right)^2\right)$. On supposera toujours $\theta(t=0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(t=0) = 0$.

- 14.7.** Exprimer la période $T(\theta_0)$ des oscillation d'amplitude θ_0 en fonction de l'intégrale $\int_0^{\theta_0} \frac{\cos(\theta) d\theta}{\sqrt{\cos^2(\theta) - \cos^2(\theta_0)}}$.
- 14.8.** En effectuant le changement de variable $\sin(\theta) = u \sin(\theta_0)$, exprimer la période $T(\theta_0)$ en fonction de T_0 . Commenter. On donne : $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\left(\frac{u}{a}\right) + cste$.

Problème II – Spectrogoniomètre à réseau

La spectrométrie est une technique de mesure des longueurs d'ondes correspondant aux raies émises par une source lumineuse. Comme chaque atome (ou chaque molécule) est caractérisé par un ensemble de raies d'émission occupant des positions bien précises dans le spectre, on peut donc déterminer la composition chimique d'une source à partir de l'analyse de la lumière qu'elle émet : ceci est réalisé couramment en astrophysique pour connaître les éléments qui constituent certaines étoiles.

On s'intéresse dans ce problème à l'étude des deux aspects, théorique et expérimental, du spectrogoniomètre à réseau.

I. Goniomètre

Un goniomètre est essentiellement constitué d'un plateau horizontal circulaire gradué en demi-degré de 0 à 359° autour duquel peuvent se déplacer un collimateur et une lunette de visée. Un vernier comportant 30 divisions sur 0,5 degré permet de faire une lecture à la minute d'arc près. Il est utilisé dans le repérage des positions angulaires de la lunette de visée, depuis une direction arbitraire de référence.

Les rayons issus du collimateur traversent un système dispersif (le réseau), placé au centre avant d'être recueillis par la lunette qui en donne une image à l'infini.

Toutes les lentilles constituant la lunette et le collimateur sont supposées minces et achromatiques et sont éclairées dans les conditions de Gauss.

1. A quoi sert un goniomètre ?
2. Expliquer le terme "achromatique". Pourquoi utilise-t-on des lentilles achromatiques dans un spectromètre ?
3. La lunette de visée permet de repérer un rayon émergent ou réfléchi par le système dispersif et de mesurer son angle de manière précise à l'aide du vernier. Elle est constituée des éléments suivants :
 - un objectif : c'est une lentille convergente de distance focale $f'_1 = 130 \text{ mm}$, de foyer image F'_1 , de centre O_1 et fixe dans un tube. Il donne de l'objet observé ou pointé une image intermédiaire.
 - un oculaire : c'est un doublet de lentilles convergentes non accolées que l'on modélisera par une lentille convergente (L_2) de vergence $V_2 = 25 \delta$, de foyer objet F_2 et de centre O_2 . L'oculaire permet l'observation « à la loupe » de l'image intermédiaire.
 - un réticule R (deux fils croisés à angle droit), placé entre l'objectif et l'oculaire. Un tambour de réglage permet de le superposer à l'image intermédiaire.
- 3.1. Expliquer les qualificatifs « objectif » et « oculaire ».

- 3.2.** Une lunette est réglée si elle est rendue afocale. Donner l'intérêt de ce réglage pour un œil emmétrope et expliquer brièvement les étapes de ce réglage. Calculer l'encombrement total O_1O_2 de la lunette.
- 3.3.** Faire un schéma de principe de la lunette réglée. Tracer sur ce schéma la marche à travers la lunette d'un faisceau de lumière faisant angle θ avec l'axe optique de celle-ci. On note θ' l'angle que font les rayons émergents de la lunette avec son axe optique. Exprimer le grossissement $G = \frac{\theta'}{\theta}$ de la lunette et calculer sa valeur numérique.
- 3.4.** Un observateur emmétrope effectue la mise au point de la lunette en visant un objet à 10 m, puis à 100 m, enfin à l'infini (visée d'une étoile). De quelle distance doit-il déplacer l'oculaire entre chaque mesure ? On rappelle la formule de Newton : $\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2$.
- 4.** Le collimateur est un système optique constitué d'un objectif (lentille convergente de distance focale $f'_c = 170 \text{ mm}$) et d'une fente dont la largeur est réglable. Un tambour de réglage permet de faire varier la distance entre la fente source et l'objectif. Le collimateur est éclairé à travers sa fente par la source étudiée
- 4.1.** Préciser le rôle du collimateur.
- 4.2.** Le réglage du collimateur consiste à amener la fente au foyer objet de l'objectif. On utilise pour cela une lunette préalablement réglée à l'infini. Expliquer brièvement les étapes du réglage du collimateur.
- Dans la suite, on suppose que la lunette et le collimateur sont réglés à l'infini.

II. Réseau par transmission éclairé par un faisceau parallèle

Un réseau ($\mathcal{R}$) plan par transmission de largeur utile L est constitué de N fentes fines transparentes gravées sur un support en verre. Les fentes sont équidistantes de a (pas du réseau) et parallèles à l'axe Oy perpendiculaire au plan de la figure 1. Le réseau comporte n' fentes (par mm) et plonge dans l'air dont l'indice sera pris égal à 1.

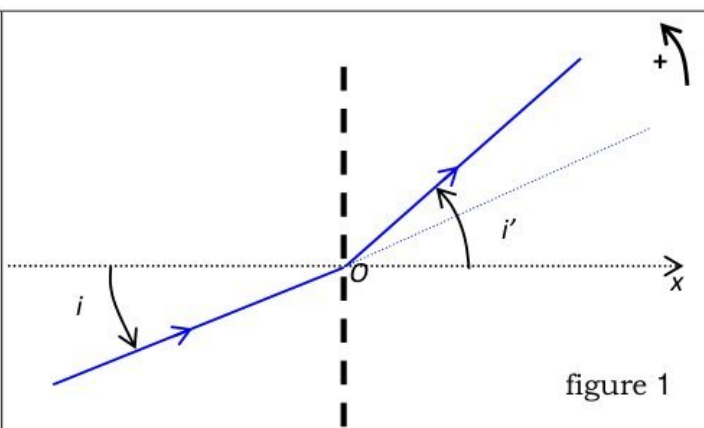


figure 1

Le réseau repose sur la platine d'un spectrogoniomètre entre le collimateur et la lunette. La fente du collimateur, supposée infiniment fine et parallèle aux fentes du réseau, est éclairée par une source de lumière de longueur d'onde dans le vide λ . Le système optique est centré autour de l'axe horizontal Ox perpendiculaire au plan du réseau et est éclairé dans les conditions de Gauss.

On désigne par i l'angle d'incidence des rayons lumineux sur le réseau, par i' leur l'angle de diffraction et par p l'ordre d'interférence du maxima de lumière observé.

5. Relation fondamentale

- 5.1.** Quels sont les phénomènes mis en jeu dans le spectroscope à réseau ?
- 5.2.** Représenter soigneusement sur un schéma la marche de deux radiations lumineuses à travers le collimateur, le réseau et la lunette lorsque le réglage est réalisé. On suppose que la source est monochromatique.
- 5.3.** Représenter soigneusement sur un schéma la marche de deux radiations incidentes sortant du collimateur et diffractées par deux fentes consécutives. Déterminer l'expression de la différence de phase φ entre ces deux radiations consécutives. Cette différence de phase est-elle conservée après la traversée de l'objectif de la lunette ? Pourquoi ?
- 5.4.** Démontrer que les radiations diffractées interfèrent constructivement suivant certaines directions d'angle i'_p que l'on exprimera en fonction de a , λ et de l'ordre p . Commenter physiquement cette relation. Justifier qualitativement que le réseau est un système dispersif.
- 5.5.** A quoi correspond en particulier le maximum i'_0 d'ordre $p=0$? Commenter ce résultat.
- 5.6.** Donner l'allure de l'intensité lumineuse dans le plan focale image de l'objectif de la lunette. On supposera la valeur de n' très grande. En pratique, cette intensité n'est pas la même dans les différents ordres. Donner une explication en quelques lignes.

6. Minimum de déviation

- 6.1.** Déterminer l'angle de déviation D entre la radiation incidente et la radiation diffractée correspondant au maxima de diffraction d'ordre p .
- 6.2.** Montrer que lorsqu'on tourne le réseau autour d'un axe parallèle aux fentes et pour un ordre p donné, la déviation D passe par un minimum D_m pour $i'_{pm} = -i'_m$. Exprimer D_m en fonction de i'_{pm} , puis en fonction de p , λ et a .
- 6.3.** Représenter sur un schéma les positions relatives du réseau, des rayons incidents et émergents correspondant au réglage du minimum de déviation pour un ordre p donné et une longueur d'onde donnée.

7. Mesure du pas du réseau et d'une longueur d'onde

On éclaire la fente du collimateur par une lampe à vapeur de mercure. La lunette d'observation vise dans la direction i'_p des maxima de chacune des raies de longueur d'onde λ du spectre d'ordre p . Pour le spectre d'ordre 2, on mesure avec le réseau ($\mathcal{R}$) la déviation minimale $D_{mi} = 30^\circ 19'$ pour la radiation indigo de longueur d'onde $\lambda_i = 435,8 \text{ nm}$ et la déviation $D_{mv} = 38^\circ 36'$ pour la raie verte de longueur d'onde λ_v .

- 7.1.** Expliquer la démarche pour chercher expérimentalement le minimum de déviation de la lumière dans un réseau.
- 7.2.** Calculer le pas a du réseau ($\mathcal{R}$). En déduire le nombre n' de fentes par millimètre du réseau utilisé.
- 7.3.** Déterminer la longueur d'onde λ_v de la raie verte du mercure.

Dans toute la suite, on prendra $n' = 600$ fentes/mm.

8. Recouvrement des ordres

On éclaire la fente du collimateur par une lampe à vapeur de mercure dont les longueurs d'onde λ utilisées, exprimées en nanomètres, sont telles que : $407,8 \text{ nm} \leq \lambda \leq 623,4 \text{ nm}$.

Déterminer, en incidence normale, les ordres complètement visibles. À partir de quel ordre observe-t-on un recouvrement ? Justifier votre réponse.

9. Pouvoir dispersif

On désire fabriquer un spectromètre avec un bon système dispersif. Hésitant entre le prisme et le réseau, on cherche à comparer le pouvoir dispersif de ces deux systèmes.

La dispersion d'un spectromètre conditionne son aptitude à séparer des longueurs d'onde très voisines. Le pouvoir dispersif angulaire se mesure par le taux de variation de la déviation avec λ au voisinage de la déviation minimale. On éclaire la fente du collimateur par une lumière polychromatique et on règle le système dispersif au minimum de déviation.

9.1. Le prisme (P) d'angle $A = 60^\circ$ est taillé dans un verre dont l'indice de réfraction suit la loi de Cauchy : $n_p(\lambda) = C_1 + \frac{C_2}{\lambda^2}$ avec $C_1 = 1,652$ et $C_2 = 1,50 \cdot 10^{-2} \mu\text{m}^2$, λ étant exprimé en μm .

Etablir, au voisinage d'une longueur d'onde λ , l'expression du pouvoir dispersif angulaire $P_p = \left| \frac{dD_m}{d\lambda} \right|$ de ce prisme en fonction de C_2 , A , λ et n_p . On rappelle la déviation minimale D_m d'un prisme d'angle A et d'indice de réfraction n_p : $\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right) = n_p \sin\left(\frac{A}{2}\right)$.

A.N. Calculer P_p en $\text{rad} \cdot \text{nm}^{-1}$ pour une radiation de longueur d'onde $\lambda = 589,3 \text{ nm}$.

Quelle est la couleur de la lumière blanche ($\lambda_{\text{bleu}} = 400 \text{ nm} < \lambda < \lambda_{\text{rouge}} = 800 \text{ nm}$) la plus déviée par le prisme ?

9.2. Etablir, au voisinage d'une longueur d'onde λ , l'expression du pouvoir dispersif angulaire $P_R = \left| \frac{dD_m}{d\lambda} \right|$ du réseau (R) de pas a en fonction de n' , λ et de l'ordre p . Comment varie P_R en fonction de n' et de p ?

A.N. Calculer P_R en $\text{rad} \cdot \text{nm}^{-1}$ pour une radiation de longueur d'onde $\lambda = 589,3 \text{ nm}$ et pour l'ordre 1.

Quelle est la couleur de la lumière blanche ($\lambda_{\text{bleu}} = 400 \text{ nm} < \lambda < \lambda_{\text{rouge}} = 800 \text{ nm}$) la plus déviée par le réseau ?

9.3. Comparer les performances du prisme avec celle du réseau.

10. Cas d'une source bichromatique

La fente du collimateur est maintenant éclairée par une lampe à vapeur de sodium. La lumière émise par cette source est constituée de deux radiations de longueurs d'onde très voisines λ_1 et $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$ ($\Delta\lambda \ll \lambda_1$). On suppose que le réseau (R) est réglé de façon à recevoir la lumière issue du collimateur sous une incidence coïncidant avec le minimum de déviation pour ces deux radiations.

- 10.1.** Pour l'ordre deux, on repère pour la radiation de longueur d'onde λ_1 les deux positions symétriques correspondant au minimum de déviation. L'écart angulaire entre ces deux positions est $\alpha = 82^\circ 47'$. Calculer la longueur d'onde λ_1 .
- 10.2.** Faire un schéma de principe décrivant cette expérience.
- 10.3.** L'axe de la lunette est confondu avec le rayon correspondant au minimum de déviation de λ_1 . La trace de la radiation λ_2 dans le plan focal image de l'objectif de la lunette est décalé d'une distance $d = 0.10 \text{ mm}$. Exprimer la distance d . Calculer alors $\Delta\lambda$ et λ_2 .
- 10.4.** Proposer un montage expérimental permettant d'enregistrer le spectre de la source lumineuse étudiée sur une plaque photographique ou une barrette CCD.

11. Application : spectre d'une source inconnue

On éclaire le réseau ($\mathcal{R}$) en incidence normale par une source lumineuse spectrale inconnue.

Pour l'ordre $p = 2$, on repère pour chacune des radiations observées à travers la lunette de visée, les deux positions symétriques correspondant au minimum de déviation. On mesure l'écart angulaire α' entre ces deux positions.

Radiation observée	Angle mesuré α'
Rouge	$92^\circ 45'$
Bleu-vert	$67^\circ 50'$
Violet	$60^\circ 22'$
Violet	$56^\circ 59'$

- 11.1.** Calculer à partir des valeurs de α' les valeurs des longueurs d'ondes expérimentales λ_{exp} .

On veut vérifier si les résultats expérimentaux obtenus sont ceux correspondant à une lampe spectrale à hydrogène. On entreprend alors une étude physico-chimique pour connaître les longueurs d'onde théoriques λ_h de l'hydrogène. Le spectre de l'hydrogène est un spectre de raies regroupées en séries. La série de Balmer de l'atome d'hydrogène est un ensemble de raies correspondant à des transitions vers l'état excité de plus basse énergie. La position de ces raies s'obtient par la formule de Rydberg-Ritz.

On rappelle que les niveaux d'énergie E_n de l'atome d'hydrogène sont donnés par

la relation : $E_n (\text{eV}) = -\frac{13,6}{n^2}$ avec n un entier.

- 11.2.** Quelle est la signification de l'entier n ?
- 11.3.** Etablir l'expression littérale de la longueur d'onde des radiations émises correspondant à la série de Balmer.
- 11.4.** Entre quelles valeurs extrêmes les longueurs d'onde des radiations de cette série sont-elles situées ? Commenter.
- 11.5.** Calculer les longueurs d'onde des quatre premières radiations de la série de Balmer.
- 11.6.** Conclure quant à la nature de la lampe spectrale étudiée expérimentalement.
- On donne la constante de Rydberg $R_H = 10979708,01 \text{ m}^{-1}$.