ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale
Enseignement Secondaire et Technique

Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs

Session 2002

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée 4 heures

Concours **TSI**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/1802 - Wadifa Info - page 1/5

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours TSI, comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.

Problème d'analyse

I. Transformation d'Abel

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On s'intéresse ici à la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$.

Pour tout entier naturel n, on pose $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.

1. (a) Vérifier que $B_0 = b_0$ et $\forall\ n \geqslant 1,\ b_n = B_n - B_{n-1}$.

   (b) Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$.

2. On suppose que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

   (a) Montrer que la suite $(a_n B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

   (b) On suppose de plus que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n - a_{n+1})$ est absolument convergente ; montrer alors que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n - a_{n+1}) B_n$ est absolument convergente et en déduire la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$.

3. Établir que si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$ converge.

4. Énoncez et démontrez un critère garantissant la convergence d'une série alternée.

II. Application à l'étude d'une série trigonométrique

Pour tout réel x et tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) \text{ et } C_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx).$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$,

$$C_n(x) + iS_n(x) = \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}}\, e^{ix},$$

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/1802 - Wadifa Info - page 2/5

et que

$$\frac{1}{2}+C_n(x)=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin(\frac{x}{2})} \quad \text{et} \quad S_n(x)=\frac{\sin(n\frac{x}{2})\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

2. En déduire alors que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et établir la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(nx)}{n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Dans la suite on pose $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$, $x \in \mathbb{R}$, et on cherche à calculer la somme de cette série.

3. (a) Vérifier que f est impaire et 2π-périodique.

(b) Soit $x \in]0,\pi[$. Montrer que $\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k}=\frac{\pi-x}{2}-\frac{1}{2}\int_x^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin(\frac{t}{2})}\,dt$.

4. Soit $x \in]0,\pi[$; pour tout $t \in [x,\pi]$, on pose $h(t)=\frac{1}{\sin(\frac{t}{2})}$.

(a) Vérifier que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x,\pi]$ et que h' y est bornée.

(b) Montrer la formule

$$\int_x^\pi h(t)\sin(n+\frac{1}{2})t\,dt=\frac{2}{2n+1}\left(\frac{\cos(n+\frac{1}{2})x}{\sin(\frac{x}{2})}+\int_x^\pi h'(t)\cos(n+\frac{1}{2})t\,dt\right).$$

(c) En déduire un majorant pour la valeur absolue de l'intégrale du premier membre et conclure que cette intégrale tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

(d) Établir alors que pour tout $x \in]0,2\pi[$, $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$.

III. UNE MAJORATION UNIFORME DES SOMMES PARTIELLES DE LA SÉRIE PRÉCÉDENTE

On conserve les notations de la partie précédente.

1. Soit $x \in]0,2\pi[$.

(a) Montrer, en utilisant une transformation d'Abel (**I. 1.**), que pour tout couple (m,n) d'entiers naturels tels que $1 \leqslant m < n$, on a

$$\sum_{p=m+1}^{n}\frac{\sin(px)}{p}=\frac{S_n(x)}{n}+\sum_{p=m+1}^{n-1}S_p(x)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right)-\frac{S_m(x)}{m+1}.$$

(b) En déduire que

$$\left|\sum_{p=m+1}^{n}\frac{\sin(px)}{p}\right|\leqslant\frac{2}{(m+1)\sin(\frac{x}{2})} \quad \text{et que} \quad \left|\sum_{p=m+1}^{+\infty}\frac{\sin(px)}{p}\right|\leqslant\frac{2}{(m+1)\sin(\frac{x}{2})}.$$

2. Soit $x \in]0,\pi]$. On note k la partie entière de $\frac{\pi}{x}$: $k=E(\frac{\pi}{x})$; on a donc $k \geqslant 1$.

(a) Montrer que $0 \leqslant \sum_{p=1}^{k}\frac{\sin(px)}{p} \leqslant kx \leqslant \pi$.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/1802 - Wadifa Info - page 3/5

(b) Montrer que si $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ alors $\sin(\theta) \geqslant \frac{2}{\pi}\theta$.

(c) Soit $n \geqslant k+1$; Montrer alors que $\left|\sum_{p=k+1}^{n} \frac{\sin(px)}{p}\right| \leqslant 2$.

3. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\left|\sum_{p=1}^{n} \frac{\sin(px)}{p}\right| \leqslant 2 + \pi.$$

IV. Calcul de la somme d'une série

Soit g une fonction réelle, 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$. On pose

$$M = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 2\pi} |g(t)| \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\sin(nt)\,dt,\ n \geqslant 1.$$

1. Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 1} b_n^2$.

2. Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{b_n}{n}$ est absolument convergente.

On cherche à calculer la somme de cette dernière série.

3. (a) Vérifier que

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{b_p}{p} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\left(\sum_{p=1}^{n} \frac{\sin(pt)}{p}\right) dt.$$

(b) En déduire que

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt - \sum_{p=1}^{n} \frac{b_p}{p} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left(f(t) - \sum_{p=1}^{n} \frac{\sin(pt)}{p}\right) g(t)\,dt.$$

4. Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta \in]0, \pi[$ tels que $(2 + \pi + \frac{\pi}{2})\delta M/\pi < \varepsilon/3$.

(a) Montrer que

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{\delta} \left(f(t) - \sum_{p=1}^{n} \frac{\sin(pt)}{p}\right) g(t)\,dt\right| \leqslant \varepsilon/3 \quad \text{et que} \quad \frac{1}{\pi}\left|\int_{2\pi-\delta}^{2\pi} \left(f(t) - \sum_{p=1}^{n} \frac{\sin(pt)}{p}\right) g(t)\,dt\right| \leqslant \varepsilon/3.$$

(b) Montrer que

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_{\delta}^{2\pi-\delta} \left(f(t) - \sum_{p=1}^{n} \frac{\sin(pt)}{p}\right) g(t)\,dt\right| \leqslant \frac{4M}{(n+1)\sin(\frac{\delta}{2})}.$$

(c) Déduire de ce qui précède que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt.$$

Fin de l'épreuve

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/1802 - Wadifa Info - page 4/5

Wadifa Info

www.wadifa-info.com

Le sujet suivant à préparer — **النموذج التالي للتحضير**

نموذج مباراة ولوج سلك التكوين الأساسي - المدرسة الوطنية العليا للإدارة - دورة 26 نونبر 2016 -

Modèle de concours d'accès au cycle de formation initiale – École Nationale Supérieure de l'Administration – 26 novembre

www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/640

Chaîne WhatsApp — **قناة واتساب**

المباريات الجديدة والنتائج كل يوم

Nouveaux concours et résultats chaque jour

wadifa-info.com/wa

Chaîne YouTube — **قناة يوتيوب**

امتحانات تجريبية بالتصحيح، بالدارجة

Examens blancs corrigés, expliqués en darija

youtube.com/@wadifainfo

Envoyer à un ami — **أرسل النموذج لصديق**

شارك هذا النموذج على واتساب مع من يحضّر معك

Partagez ce sujet sur WhatsApp

wa.me