

Transcranial Magnetic Stimulation

Présentation du système.

Selon l'Organisation Mondiale de la Santé, la dépression est la première cause d'handicap. Elle se situe au quatrième rang des maladies en termes de coût par maladie.

Jusqu'à présent, on obtenait des résultats plus ou moins probants selon les patients avec les traitements médicamenteux (antidépresseurs), les psychothérapies et les sismothérapies (électrochocs).

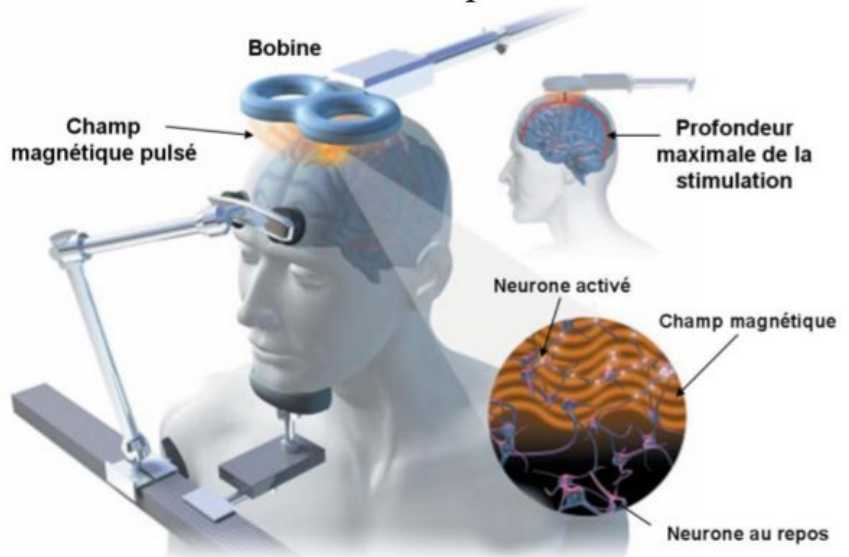
Récemment, de nouvelles pistes sont apparues dans la thérapeutique de cette pathologie, notamment avec la TMS Transcranial Magnetic Stimulation ou la Stimulation Magnétique Transcranienne (SMT).

Principe de la technique :

Ce traitement est une technique non-invasive qui consiste à déplacer à la surface du crâne une sonde de stimulation afin de modifier l'activité électrique du cortex.

L'idée est de stimuler des zones du cortex cérébral par l'application sur le crâne d'une bobine délivrant des impulsions magnétiques brèves et de forte intensité, totalement indolores.

Illustration 1 : Principe de la TMS



La TMS est utilisée comme outil de recherche afin d'améliorer les connaissances des mécanismes neurophysiologiques et cognitifs.

Ses applications thérapeutiques potentielles sont nombreuses, en particulier dans le domaine psychiatrique : la TMS fait actuellement l'objet d'études cliniques dans les domaines des épisodes dépressifs majeurs résistants aux médicaments et des hallucinations auditives de la schizophrénie, où elle apparaît comme particulièrement prometteuse.

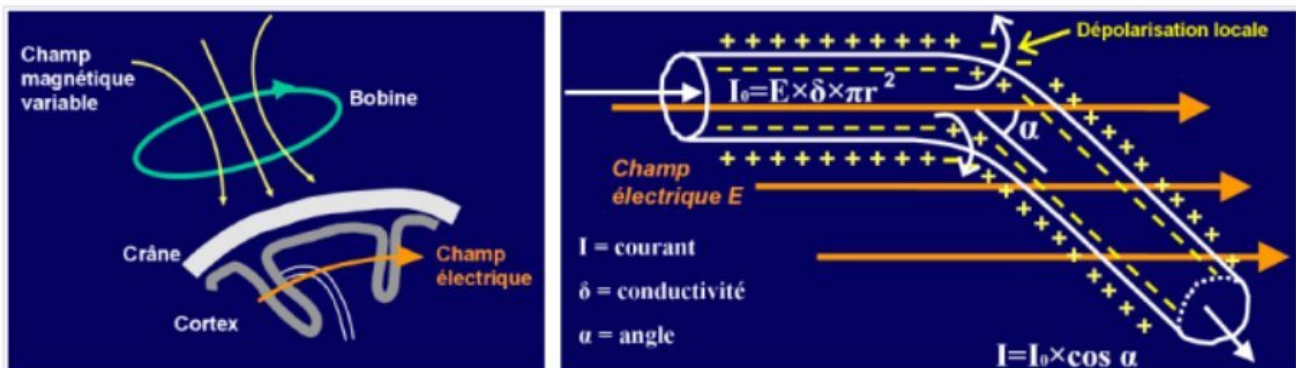
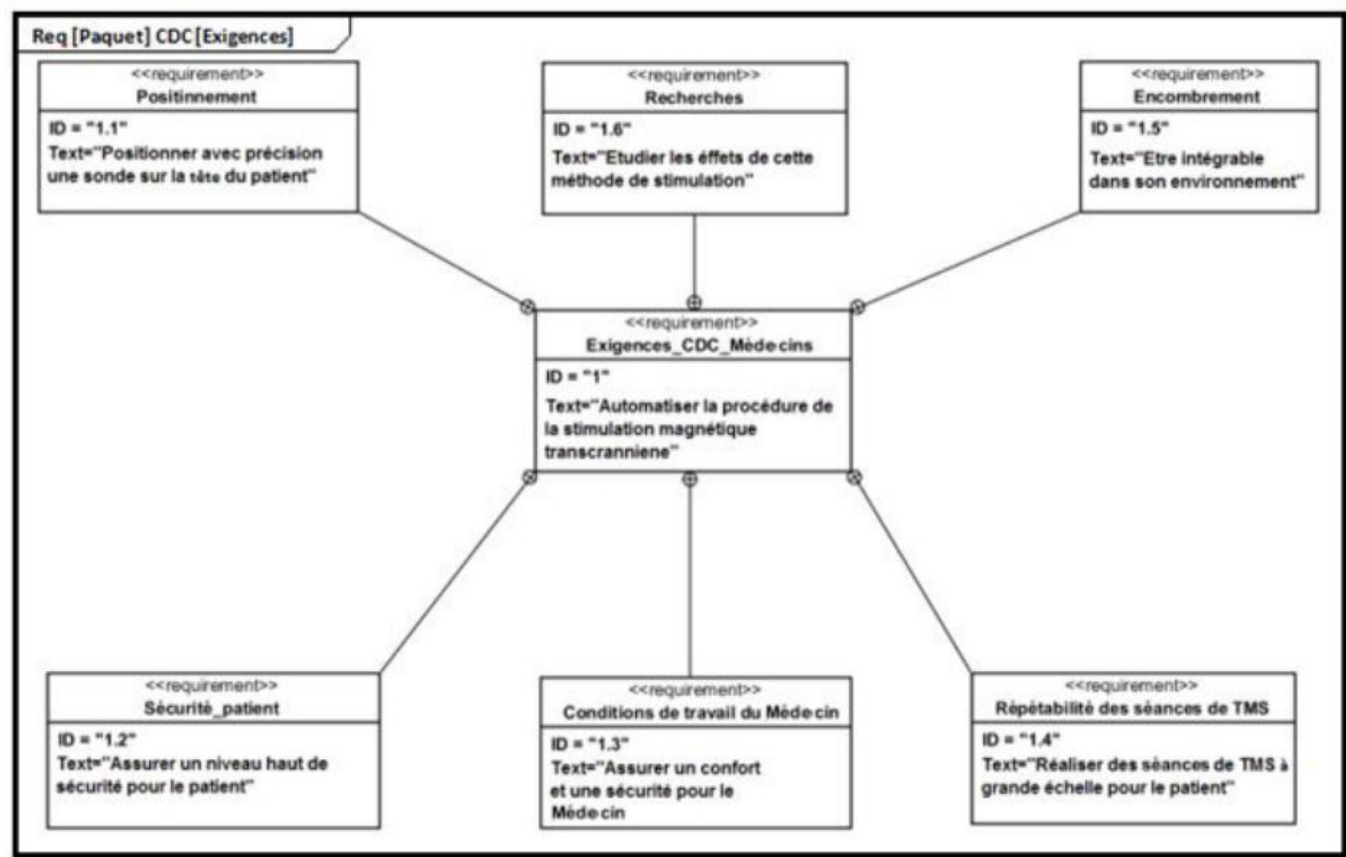


Illustration 2 : Mécanisme d'activation neuronale engendrée par la TMS.

Afin de soulager le praticien, de rendre possible le traitement à grande échelle de patients avec la TMS et d'affiner l'évaluation de ses effets, un système robotique pour la TMS est développé.

Le sujet qu'on vous propose vise à étudier le système robotisé répondant aux exigences imposées par les médecins et les chercheurs.

Diagramme1 : Diagrammes des exigences de point de vue médecins et chercheurs :



Le robot développé par Axilum possède un bras articulé à 7 degrés de liberté ainsi qu'un siège également mobile selon 2 axes. Au bout du bras se trouve fixée la bobine de stimulation TMS. Le schéma cinématique du robot est donné ci-contre.

Les trois premiers axes de rotation (J1, J2 et J3) permettent le placement de la bobine autour d'une première sphère de grand rayon son centre est le point O.

L'axe de translation suivant la direction (OE) J4 permet de placer la bobine au contact du crâne du patient.

Les liaisons pivot du poignet (J5, J6 et J7) sont utilisées pour orienter la bobine en fonction de la zone de stimulation recherchée, la bobine décrit alors une petite sphère de centre E.

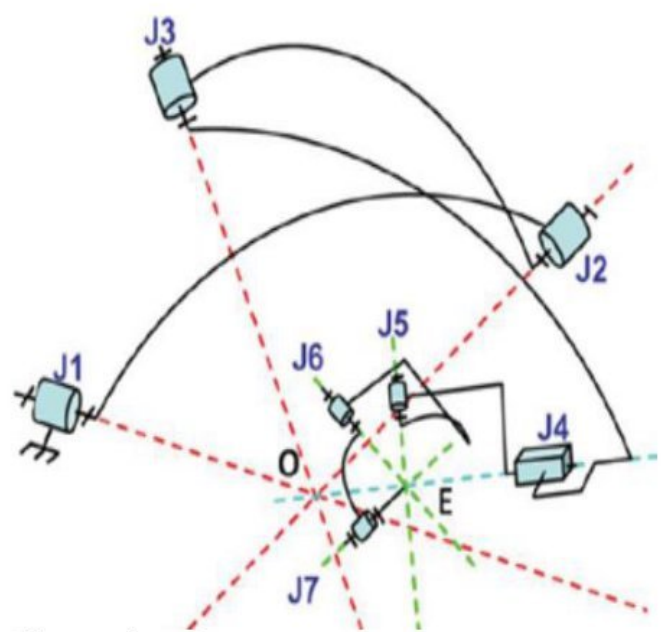
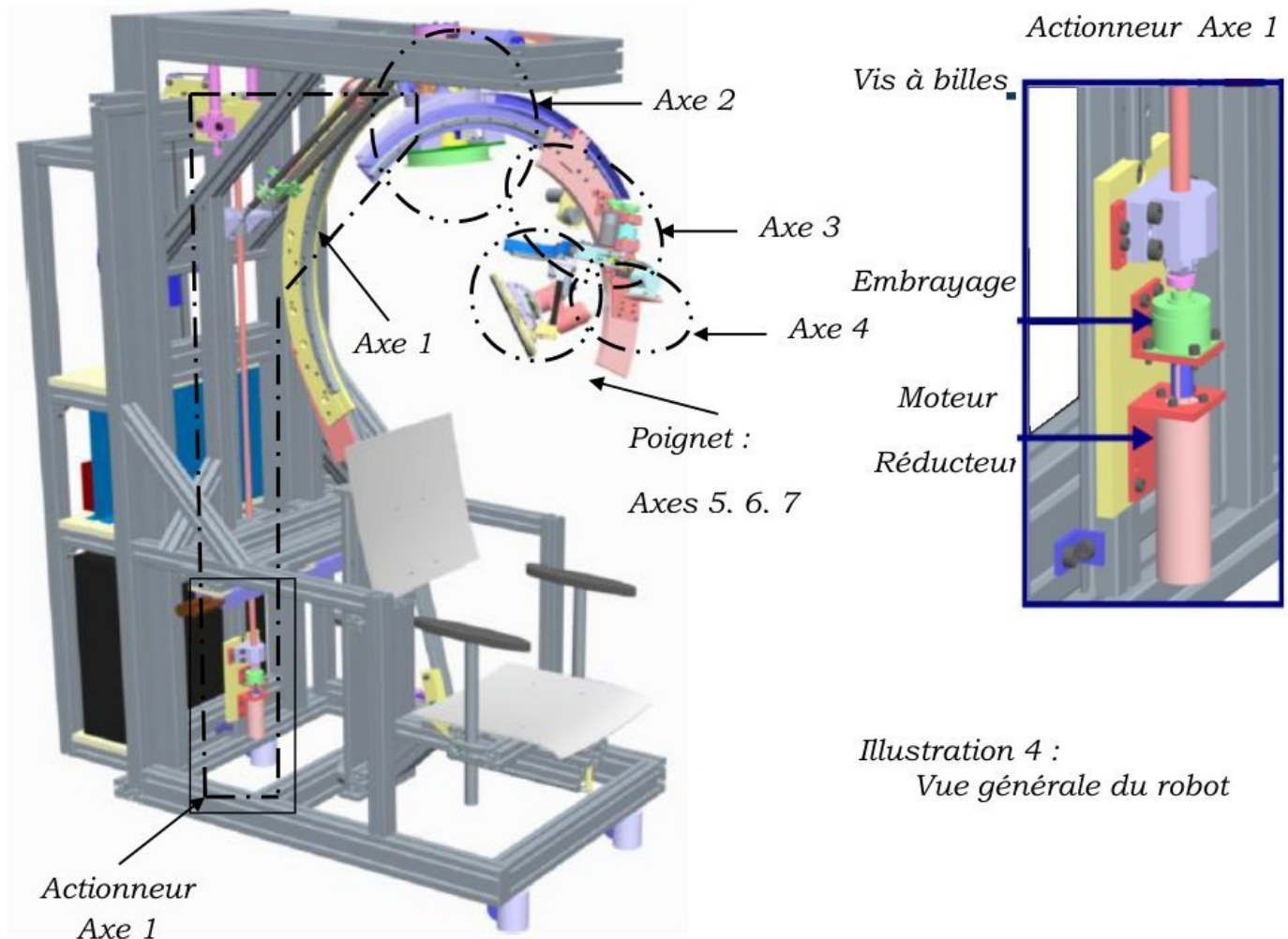


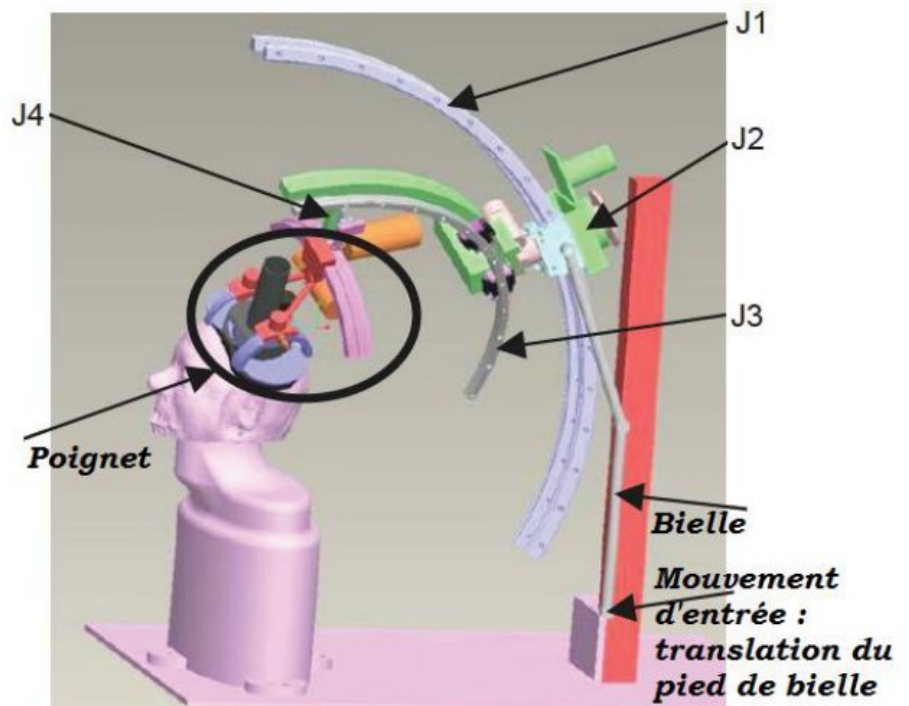
Illustration 3 : Schéma cinématique du robot



La commande de ces différents axes est réalisée grâce à une caméra stéréoscopique qui détermine dans un environnement 3D, la position de la tête du patient.

De plus, un capteur d'effort placé sur la bobine permet de réguler l'effort bobine/crâne.

A partir de ces informations, un calculateur détermine la commande à envoyer à chaque articulation. La commande des articulations est asservie afin de pouvoir suivre par exemple un léger mouvement de la tête du patient.



Les moteurs électriques des articulations doivent donc pouvoir fonctionner à différentes vitesses.

Le diagramme 2 ci-dessous représente le diagramme partiel des exigences auquel doit répondre le robot.

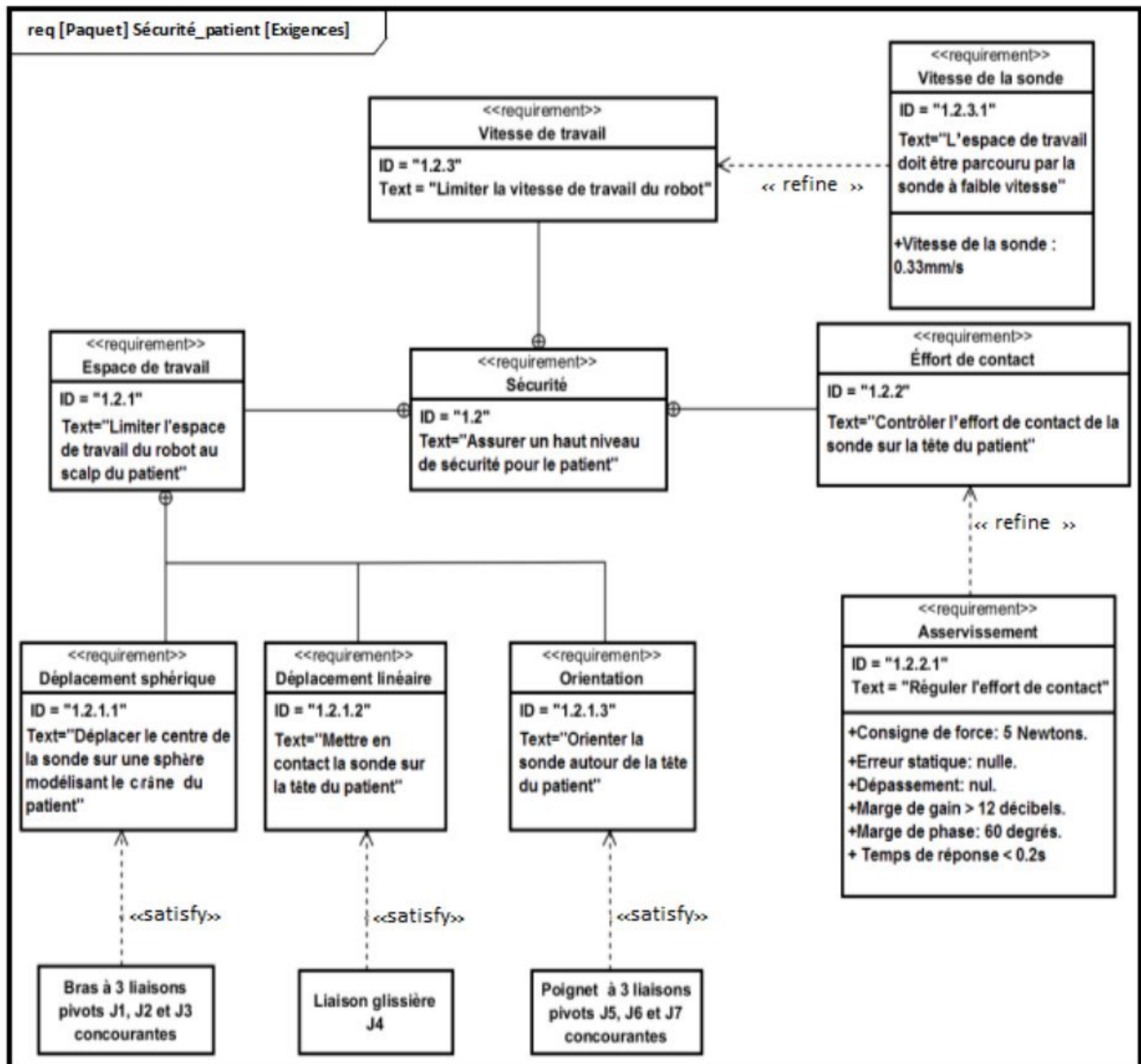


Diagramme 2 : Diagramme des exigences Sécurité du patient :

L'étude qu'on vous propose comporte 3 parties :

- **Partie I : Etude de l'axe 1**
- **Partie II : Etude des axes 2 ,3 et 4**
- **Partie III : Analyse de la régulation en effort de l'axe 4**

Partie I : Etude de l'axe 1**Objectifs :**

- déterminer la loi entrée / sortie cinématique de l'axe 1 ;
- dimensionner l'actionneur de l'axe 1.

Un dispositif de type bielle-manivelle est retenu pour la transformation de mouvement de l'axe 1. L'exigence espace de travail limite l'amplitude de mouvement de rotation de l'axe 1 à 110° . Ce mouvement est obtenu par l'utilisation d'un guidage de forme circulaire (*Figure 1, page 6*).

L'actionnement est obtenu à l'aide d'un dispositif bielle-manivelle ; un moteur à courant continu Maxon assurant le déplacement du coulisseau par le biais d'un réducteur lié à une vis à billes ; le coulisseau étant lié à l'écrou.

Un système de rappel exerce en permanence un effort vertical pour tendre à ramener le coulisseau en position haute en cas de coupure de courant. Dans cette situation, un embrayage assure le découplage entre l'ensemble moteur-réducteur et la transmission. Le diagramme 3 ci-dessous définit le diagramme de bloc interne de l'axe 1.

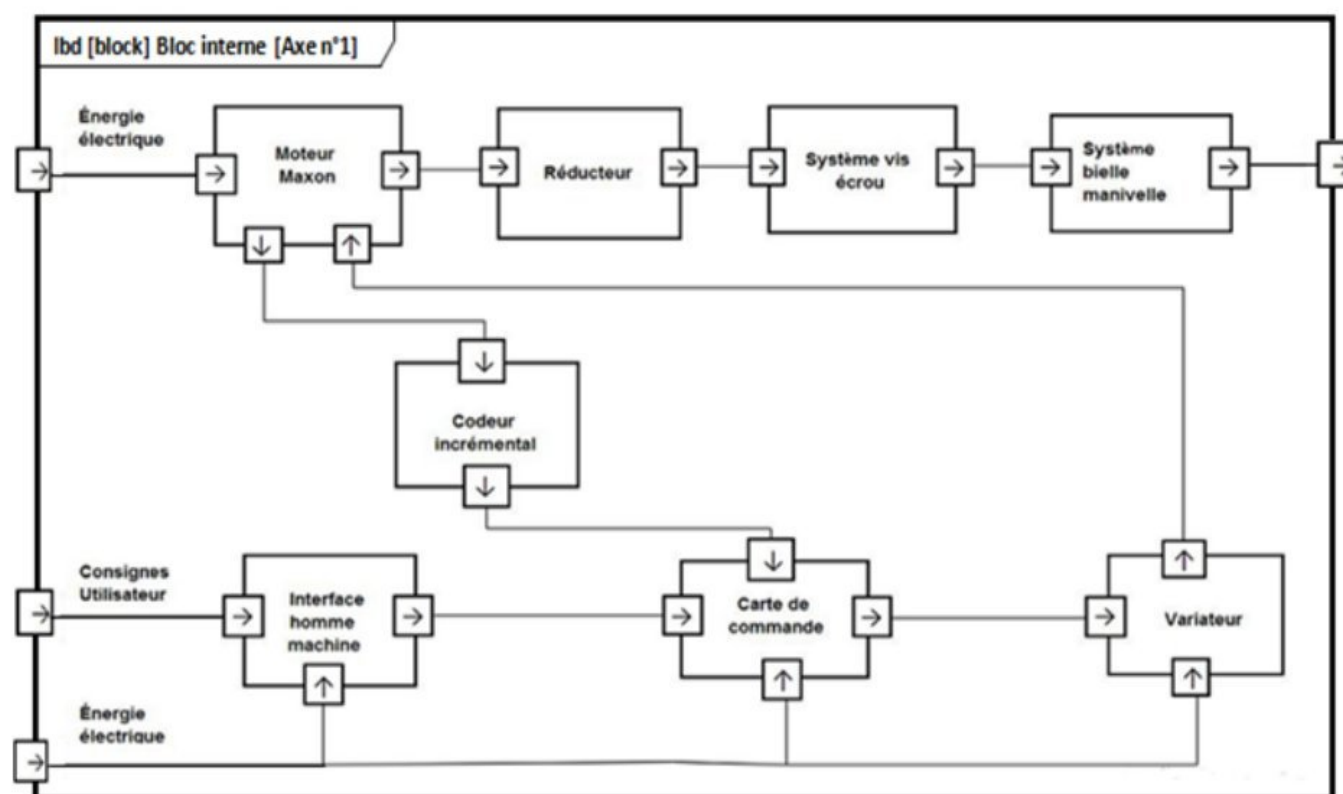


Diagramme 3 : Diagramme de bloc interne ibd de l'axe 1

Question 1 :

a° - À partir du diagramme 3, déterminer les composants qui interviennent dans la chaîne d'énergie de l'axe 1.

b° - À partir du diagramme 3, déterminer les composants qui interviennent dans la chaîne d'information de l'axe 1.

Les figures 1 et 2 représentent les schémas cinématiques de l'axe 1 :

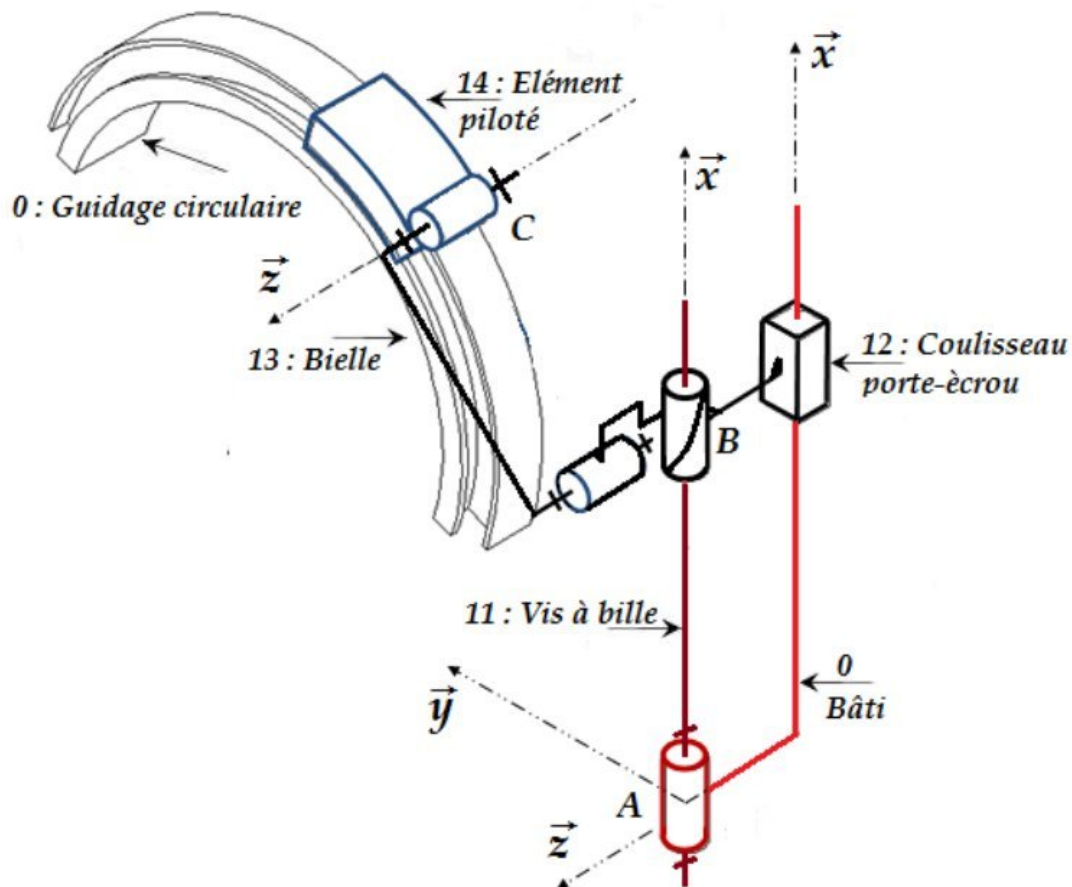


Figure 1 : Schéma cinématique spatial du système de transformation de mouvement de l'axe 1

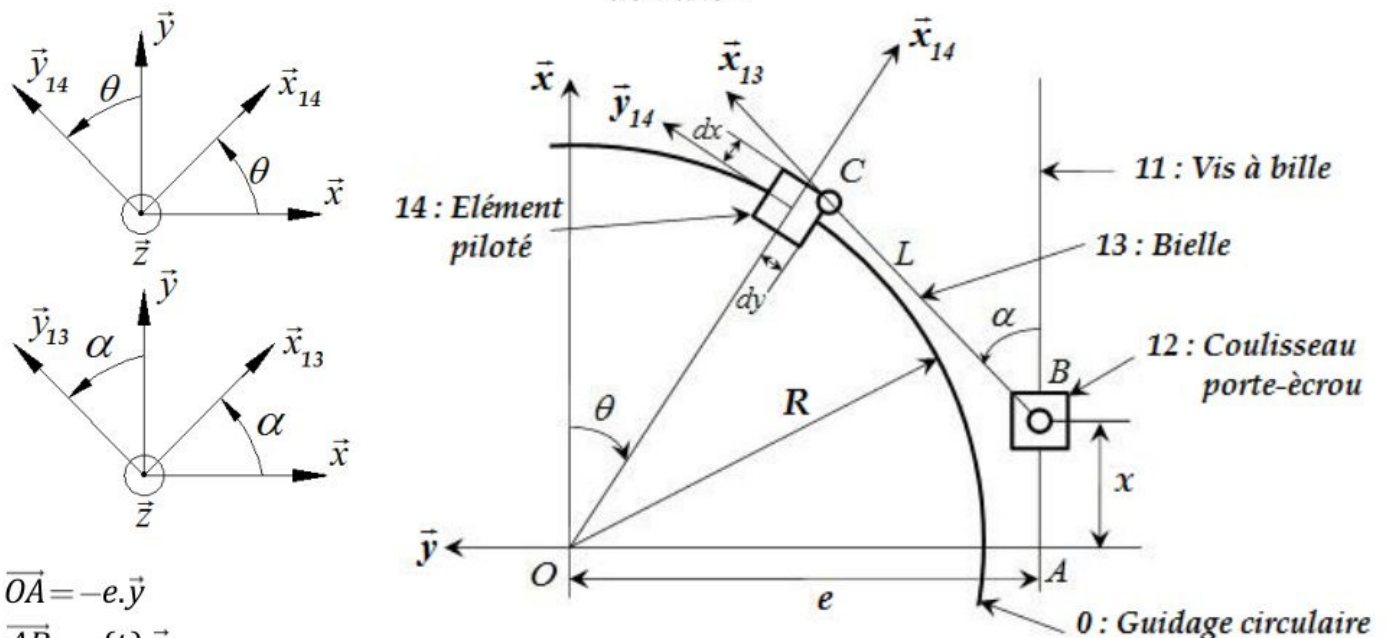


Figure 2 : Schéma plan du dispositif de type bielle-manivelle

$$\overrightarrow{OA} = -e \cdot \vec{y}$$

$$\overrightarrow{AB} = x(t) \cdot \vec{x}$$

$$\overrightarrow{BC} = L \cdot \vec{x}_{13}$$

$$\overrightarrow{OC} = (R + dx) \cdot \vec{x}_{14} - dy \cdot \vec{y}_{14}$$

$$\theta(t) = (\vec{x}, \vec{x}_{14}) = (\vec{y}, \vec{y}_{14}) \quad \alpha(t) = (\vec{x}, \vec{x}_{13}) = (\vec{y}, \vec{y}_{13})$$

Le système de transformation de mouvement de l'axe 1 est constitué des éléments suivants : voir figure 1 et figure 2 page 6.

- **Guidage circulaire fixé au bâti 0** : repère lié $R_0(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ supposé galiléen. $\vec{x}$ est vertical ascendant et $\vec{g} = -g\vec{x}$ est l'accélération de la pesanteur.
- **Vis à bille 11** : en liaison pivot parfaite d'axe $(A, \vec{x})$ avec le guidage circulaire (0) tel que : $\overrightarrow{OA} = -e\vec{y}$. On donne $\vec{\Omega}(11/0) = \omega_{11}\vec{x}$.
- **Coulisseau 12** : en liaison glissière parfaite de direction $\vec{x}$ avec le guidage circulaire (0) et en liaison hélicoïdale, à droite et de pas p en mm, d'axe $(B, \vec{x})$ avec la vis à bille (11) tel que : $\overrightarrow{AB} = x(t)\vec{x}$.
- **Bielle 13** : en liaison pivot parfaite d'axe $(B, \vec{z})$ avec le coulisseau (12) et en liaison pivot parfaite d'axe $(C, \vec{z})$ avec l'élément piloté (14). Le repère $R_{13}(B, \vec{x}_{13}, \vec{y}_{13}, \vec{z})$ est lié à la bielle (13) tel que : $\alpha(t) = (\vec{x}, \vec{x}_{13}) = (\vec{y}, \vec{y}_{13})$ et $\overrightarrow{BC} = L\vec{x}_{13}$.
- **Élément piloté 14** : en contact avec le guidage circulaire (0). La liaison 14/0 est modélisée par une liaison pivot parfaite d'axe $(O, \vec{z})$. Le repère $R_{14}(O, \vec{x}_{14}, \vec{y}_{14}, \vec{z})$ est lié à l'élément piloté (14) tel que : $\theta(t) = (\vec{x}, \vec{x}_{14}) = (\vec{y}, \vec{y}_{14})$ et $\overrightarrow{OC} = (R + dx)\vec{x}_{14} - dy\vec{y}_{14}$.

Etude cinématique :

Question 2 :

- a° Tracer le graphe de structure de l'axe 1.
- b° Ecrire les équations, exprimées dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, traduisant la fermeture cinématique au point C de la chaîne 0-12-13-14-0.
- c° Ecrire les équations, exprimées dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, traduisant la fermeture géométrique de la chaîne 0-12-13-14-0.
- d° En considérant la chaîne 0-11-12-0, déterminer la relation entre ω_{11} et $\dot{x}$. En utilisant les valeurs numériques ci-dessous ainsi que le diagramme 3 page 5, déterminer la valeur numérique de $\dot{x}$ (en mm/s).

Valeurs numériques : $R = 500$ mm, $L = 560$ mm, $dx = 35$ mm, $dy = 96$ mm, $e = 619$ mm, $d = 16$ mm (diamètre de la vis à bille), $p = 5$ mm (pas de la vis à bille), $k = 1/4,3$ (rapport de réduction du réducteur), $N_{mot} = 6930$ tr/min (vitesse de rotation nominale du moteur).

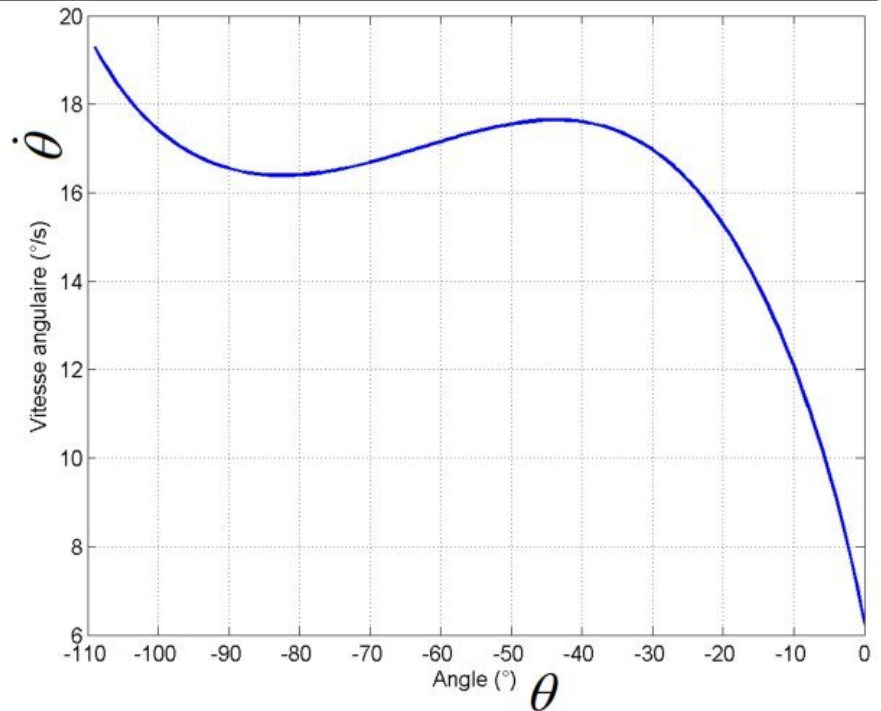
On cherche à déterminer graphiquement la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ de l'élément piloté 14 lorsqu'il atteint la position angulaire $\theta = -20^\circ$.

Question 3 : Répondre sur le document réponse DR1 (Page 24).

- a° Tracer le vecteur vitesse $\vec{V}(B, 12/0)$. On prend, pour la suite, $\dot{x} = -134,3$ (mm/s).
- b° Déterminer la direction du vecteur vitesse $\vec{V}(C, 14/0)$.
- c° Déterminer graphiquement le vecteur vitesse $\vec{V}(C, 14/0)$. En déduire la valeur de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$.

La courbe de la figure 3 est obtenue par simulation numérique du comportement cinématique du système.

Figure 3 : Vitesse angulaire de l'élément piloté 14 en fonction de l'angle θ .



Question 4 : Comparer la valeur numérique de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ de la question 3-c° avec celle simulée pour $\theta = -20^\circ$. Conclure.

Etude dynamique (voir paramétrage sur la page 6) :

Données et hypothèses :

- Moteur Maxon :
 - La vitesse de rotation du moteur est notée ω_m .
 - Le moment d'inertie de l'axe moteur par rapport à son axe de rotation est noté J_m .
 - Le couple moteur est noté C_m .
- Réducteur :
 - Le rapport de réduction est noté k .
 - Le moment d'inertie équivalent du réducteur ramené sur l'axe moteur est noté J_r .
 - Le rendement du réducteur est noté η_r .
- Vis à bille 11 : Le moment d'inertie par rapport à son axe de rotation est noté J_{11} .
- Coulisseau 12 : La masse est notée M_{12} .
- Le rendement de la liaison $L_{12/11}$ est noté η_v .
- Bielle 13 : Le moment d'inertie par rapport à l'axe $(B, \vec{z})$ est noté J_{13} . Le centre d'inertie est noté G_{13} tel que $\overrightarrow{BG_{13}} = \frac{L}{2} \cdot \vec{x}_{13}$. La masse est notée M_{13} .
- Élément piloté 14 : Le moment d'inertie par rapport à l'axe $(G_4, \vec{z})$ est noté J_{14} . Le centre d'inertie est noté G_{14} tel que $\overrightarrow{OG_{14}} = R \cdot \vec{x}_{14}$. La masse est notée M_{14} .

- L'axe moteur et la vis à bille sont supposés équilibrés dynamiquement.
- l'action du système de rappel sur l'écrou (Coulisseau 12) est modélisée par un glisseur en B : $\vec{F}_{\text{rappel}} = F_{\text{rappel}} \cdot \vec{x}$.
- L'accélération de la pesanteur $\vec{g} = -g \cdot \vec{x}$.

On considère l'ensemble de la chaîne cinématique

Σ = axe moteur, réducteur, 11, 12, 13, 14

Question 5 :

- a°**- Déterminer l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble $\Sigma_1 = (\text{axe moteur, réducteur, 11, 12})$ par rapport au repère galiléen R_0 .
- b°**- Déterminer l'expression de l'énergie cinétique de la **bielle 13** par rapport au repère galiléen R_0 .
- c°**- Déterminer l'expression de l'énergie cinétique de **l'élément piloté 14** par rapport au repère galiléen R_0 .
- d°**- Déterminer, en les justifiant, les puissances des actions mécaniques intérieures à l'ensemble Σ .
- e°**- Déterminer, en les justifiant, les puissances des actions mécaniques extérieures à l'ensemble Σ .

La configuration la plus défavorable est obtenue lorsque la bielle est verticale, c'est-à-dire lorsque $\theta = -90^\circ$. Dans ce cas, il est possible d'approximer $(R+dx) \approx e$ et $\alpha \simeq 0$.

Question 6 :

- a°**- Dans cette configuration et en reprenant les résultats de la question 2, déterminer, en fonction de e , dy et L , les relations cinématiques entre $\dot{x}$, $\dot{\alpha}$ et $\dot{\theta}$ au voisinage de la position $\alpha \simeq 0$. Montrer que l'énergie cinétique de l'ensemble Σ peut s'écrire sous la forme $T(\Sigma/0) = \frac{1}{2} J_{\text{eq}} \omega_m^2$. En déduire l'expression de J_{eq} , le moment d'inertie équivalent ramené à l'axe moteur.
- b°**- Par application du théorème de l'énergie cinétique, déterminer, sans expliciter J_{eq} , l'expression du couple moteur C_m dans la configuration la plus défavorable.

Partie II : Etude des axes 2, 3 et 4 :

Objectifs :

- dimensionner les actionneurs des axes 3 et 4.
- dimensionner le système de freinage de l'axe 2.

Données et hypothèses :

- Les éléments constituant le robot, pour cette partie, sont représentés sur le tableau de la page 10.
- L'axe 1 est supposé bloqué dans la position θ_1 . L'angle θ_1 est constant.
- $\vec{g} = -g \cdot \vec{x}$ est l'accélération de la pesanteur.

- Un dispositif de rappel à effort constant F_R , suivant $(E, \vec{x}_3)$, permet d'assurer un mouvement de translation du poignet vers l'extérieur de la tête du patient en cas de coupure de courant.

Dans cette partie, on considère le modèle simplifié défini par le schéma cinématique de la figure 4 ci-dessous.

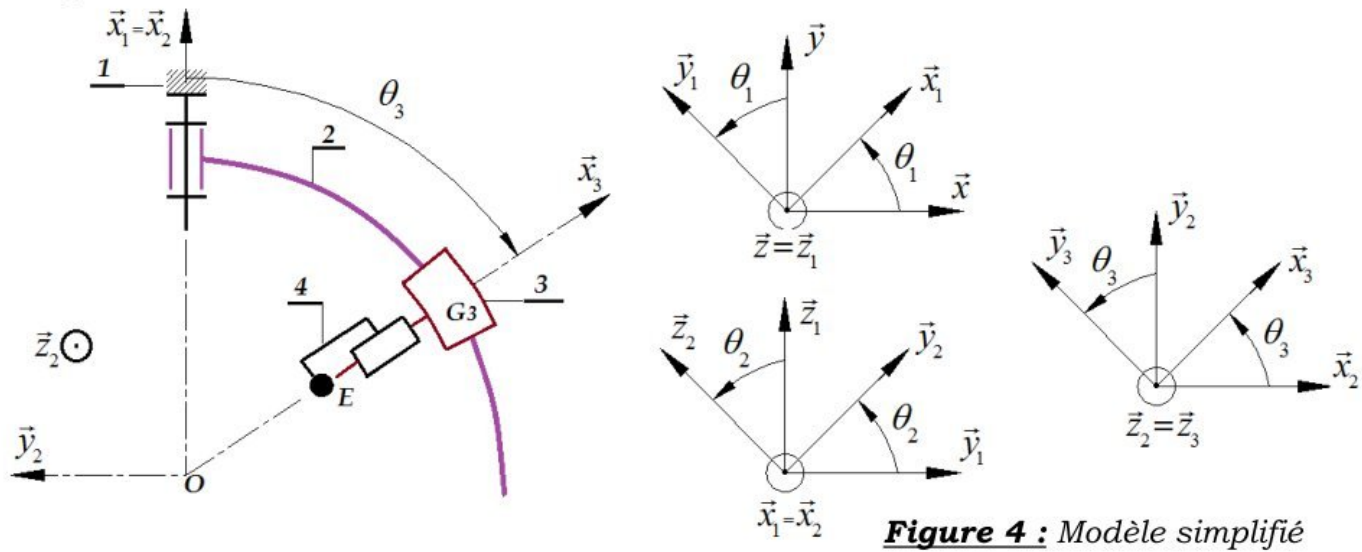


Tableau : Eléments constituant le robot

solides	Paramétrage géométrique et Modèle adopté	Paramétrage cinétiques
0	Repère lié $R_0(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ supposé galiléen	
1	Repère lié $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$. Liaison avec le support 0 <u>supposée bloquée</u> . L'angle θ_1 est constant.	
2	Repère lié $R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$. $\theta_2 = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$ L2/1 : liaison pivot d'axe $(O, \vec{x}_1)$.	<u>On suppose</u> O le centre de gravité. Moment d'inertie par rapport à l'axe $(O, \vec{x}_2)$: J_2 .
3	Repère lié $R_3(O, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$. $\theta_3 = (\vec{y}_2, \vec{y}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$ L3/2 : liaison pivot d'axe $(O, \vec{z}_2)$.	Centre de gravité G_3 . $\overrightarrow{OG_3} = R.\vec{x}_3$ Masse M_3 . Matrice d'inertie $\bar{I}(O,3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)}$
4 + poignet	Repère lié $R_4(E, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$. L4/3 : liaison glissière de direction $(\vec{x}_3)$.	Centre de gravité E. Masse M_4 . $\overrightarrow{OE} = \lambda(t).\vec{x}_3$ Matrice d'inertie $\bar{I}(E,4) = \begin{pmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)}$

Pour chacun des trois axes motorisés, une action mécanique et un frottement visqueux équivalent de l'actionneur $[Mi]$ associé à l'axe N° i sont définis au niveau de la liaison correspondante :

Grandeurs équivalentes rapportées à l'axe	Axe N°2	Axe N°3	Axe N°4
Action mécanique de l'actionneur $[Mi]$ sur l'axe	C_{M2} (en $N.m$)	C_{M3} (en $N.m$)	F_{M4} (en N)
Frottement visqueux	f_2 (en $\frac{N.m}{rad/s}$)	f_3 (en $\frac{N.m}{rad/s}$)	f_4 (en $\frac{N}{m/s}$)

Le graphe d'analyse du modèle mécanique est proposé figure 5.

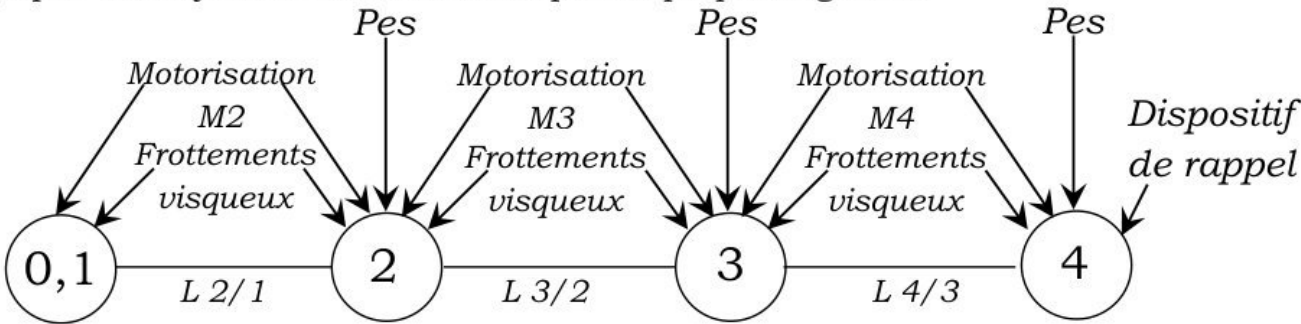


Figure 5 : Graphe d'analyse

Question 7 :

- a°. Déterminer le torseur cinétique, au point O, de (3) dans son mouvement par rapport à R_0 .
- b°. Déterminer le torseur cinétique, au point O, de (4) dans son mouvement par rapport à R_0 .

Mise en place de la stratégie d'étude du modèle proposé

Question 8 : Proposer une stratégie d'isollements et de calculs à mettre en œuvre pour déterminer les expressions des actions mécaniques C_{M2} , C_{M3} et F_{M4} (générées par les actionneurs $[Mi]$ associés aux trois axes) : on indiquera, dans le tableau ci-dessous (à recopier sur la copie) l'ensemble isolé, le théorème à utiliser (avec éventuellement le point de calcul) et la direction de projection en justifiant clairement le choix de la méthode adoptée.

Effort	Ensemble isolé	Théorème utilisé	Justification du choix d'isolement et du théorème utilisé
C_{M2}			
C_{M3}			
F_{M4}			

Les calculs vectoriels ci-dessous peuvent être utilisés dans les questions 9, 10 et 11 :

$$\vec{x} \cdot \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 \\ -\sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2 \\ \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2 \end{pmatrix}_{B2} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta_3 \\ \sin\theta_3 \\ 0 \end{pmatrix}_{B2} = \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_3 - \sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2 \cdot \sin\theta_3$$

$$\vec{x} \wedge \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 \\ -\sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2 \\ \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2 \end{pmatrix}_{B2} \wedge \begin{pmatrix} \cos\theta_3 \\ \sin\theta_3 \\ 0 \end{pmatrix}_{B2} = \begin{pmatrix} -\sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2 \cdot \sin\theta_3 \\ \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2 \cdot \cos\theta_3 \\ \cos\theta_1 \cdot \sin\theta_3 + \sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2 \cdot \cos\theta_3 \end{pmatrix}_{B2}$$

Question 9 : En utilisant la démarche proposée dans la question 8, exprimer l'équation différentielle du mouvement liant F_{M4} aux paramètres du mouvement $\theta_2(t), \theta_3(t)$ et $\lambda(t)$.

On suppose pour la question suivante :

La liaison 4/3 est bloquée à $\lambda(t) = \lambda_{\max}$.

L'ensemble $E_{34} = (3+4)$ est de masse M_{34} , de centre d'inertie G_{34} tel que

$$\overrightarrow{OG_{34}} = R_{34} \cdot \vec{x}_3 \text{ et de matrice d'inertie } \bar{I}(O, E_{34}) = \begin{pmatrix} A_{34} & 0 & 0 \\ 0 & B_{34} & 0 \\ 0 & 0 & C_{34} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)}.$$

Question 10 : En utilisant la démarche proposée dans la question 8, exprimer l'équation différentielle du mouvement liant C_{M3} aux paramètres du mouvement $\theta_2(t)$ et $\theta_3(t)$.

Etude du système de freinage de l'axe 2 : Voir le diagramme Bdd page 13.

La transmission de l'axe 2 est composée :

- d'un moteur Maxon,
- d'un renvoi conique de rapport 1/3,
- d'un réducteur Harmonic Drive de rapport de réduction $\rho = 1/100$ et de rendement $\eta = 0,9$.

L'actionneur [M2] sur l'axe N°2 est équipé d'un système de freinage permettant de délivrer un couple C_{f2} sur l'axe $(O, \vec{x}_1)$ et

assurant l'immobilisation de l'axe 2 en cas d'arrêt d'urgence. Voir le tableau page 10.

Question 11 : les axes sont supposés à l'arrêt.

a° En appliquant le théorème du moment statique en O en projection sur $\vec{x}_1$, déterminer l'expression de C_{f2} en fonction de $M_3, M_4, g, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ et $\lambda_{\max}$.

b° Quelle est la position la plus défavorable pour le système de freinage ? En déduire l'expression de C_{f2} dans cette position.

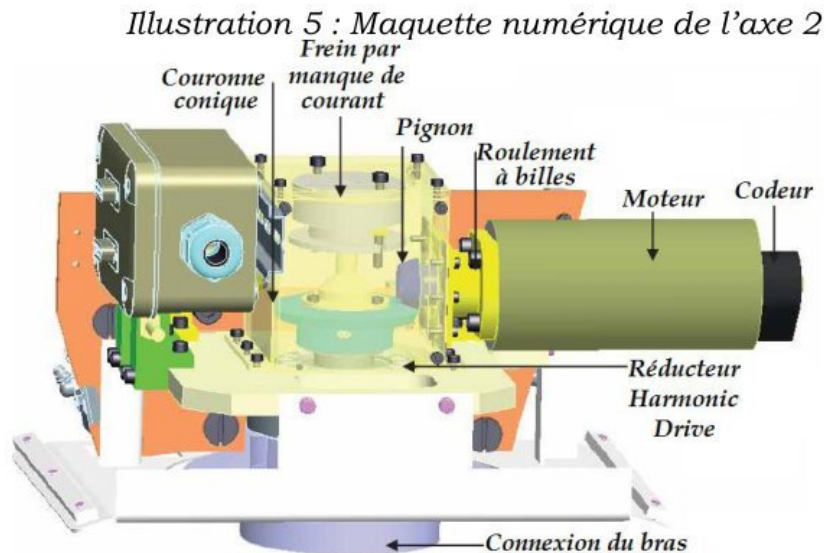
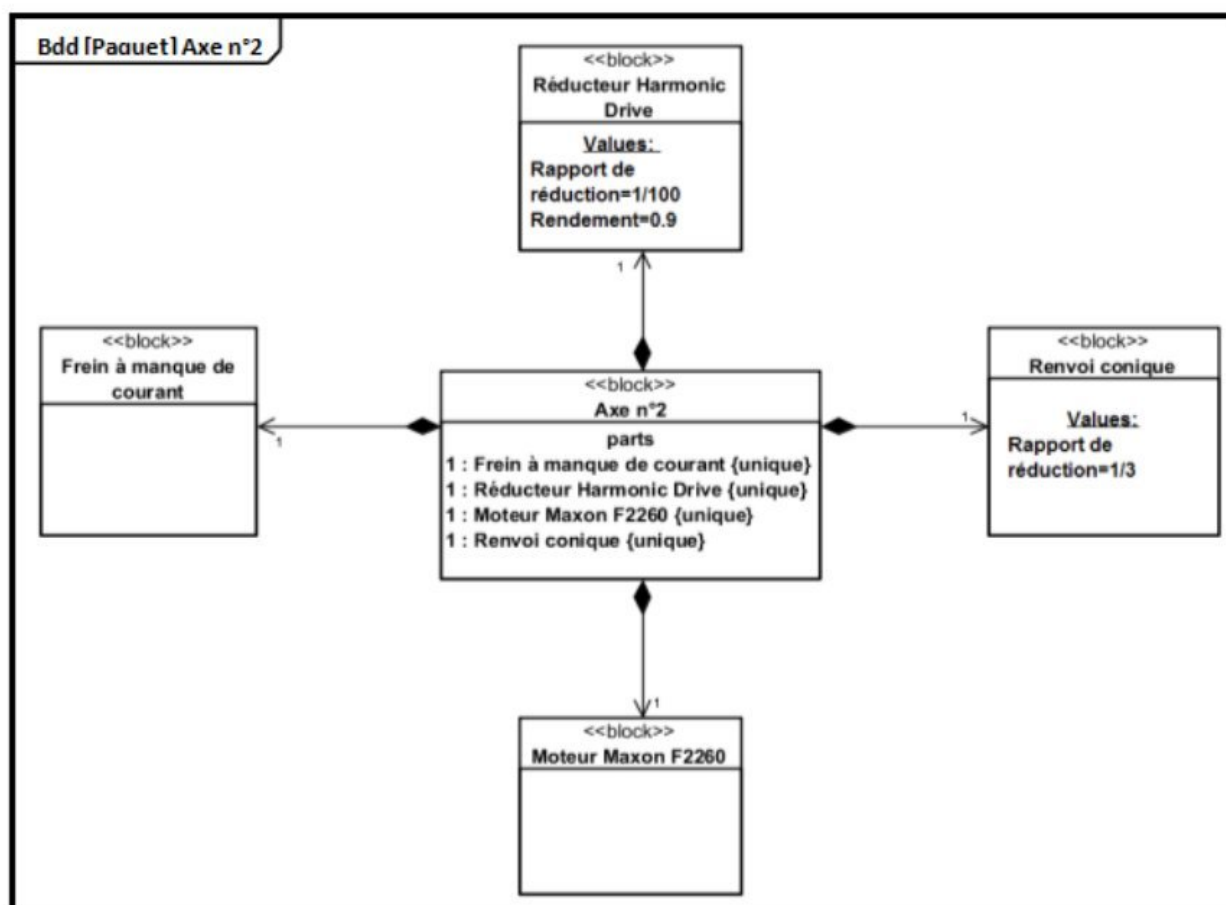


Diagramme 4 : Diagramme bdd de l'axe n°2

En cas de coupure de courant, l'axe de rotation du réducteur est immobilisé par le frein, qui entre en action en quelques millisecondes.

Quelques secondes après la coupure de courant l'axe est ramené en position verticale suite au mouvement de l'axe 1.

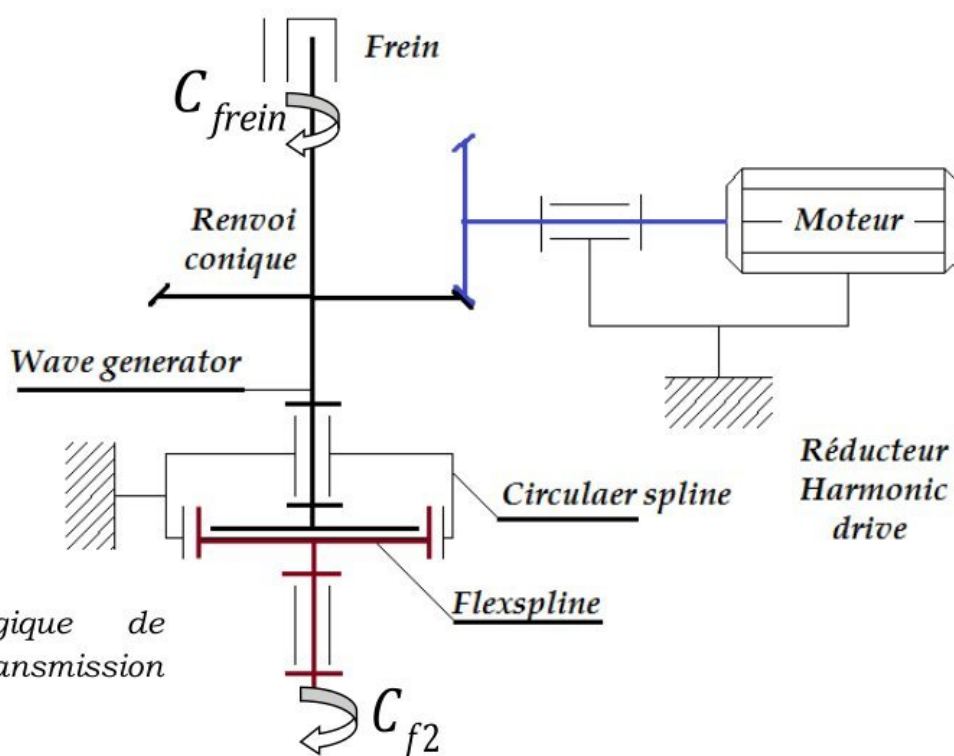


Figure 6 :

Schéma technologique de l'ensemble de la transmission du deuxième axe :

Question 12 : Déterminer l'expression du couple C_{frein} issu du frein placé à l'entrée du réducteur Harmonic Drive en fonction de C_{f2} .

Frein à manque de courant :

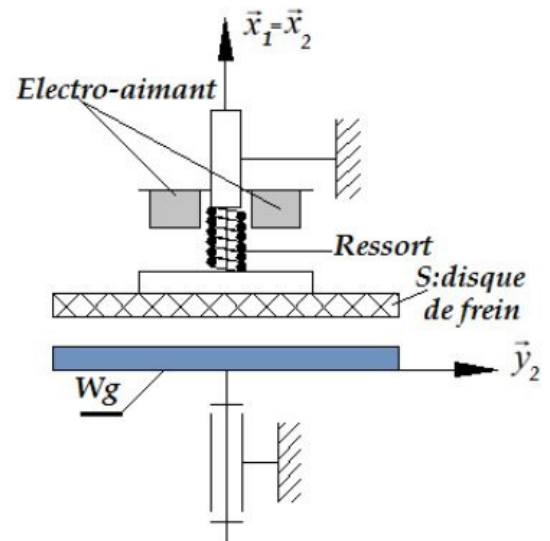
Le schéma ci-contre (en position intermédiaire) précise le modèle retenu pour le frein à manque de courant.

Dans le cas du frein à manque de courant, c'est la non alimentation du frein et du moteur qui provoque le freinage.

L'électro-aimant est sous tension. Par action d'un champ magnétique, le disque est attiré vers l'électro-aimant.

Lorsque l'électro-aimant n'est pas alimenté le contact entre le disque de frein et un disque lié à l'axe d'entrée du réducteur est rétabli par l'intermédiaire de l'action du ressort.

Figure 7 : Schéma cinématique du frein



L'avantage de ce procédé réside dans le fait que le freinage est toujours assuré, même en cas de coupure d'énergie. C'est la raison pour laquelle ce procédé est fortement conseillé lorsque la sécurité est prépondérante.

L'action mécanique exercée par le disque de frein (S) sur le plateau (Wg) est modélisée, en chaque point M de la surface de contact, par la densité surfacique de contact $\vec{f}_M(S \rightarrow Wg) = -P\vec{x}_2 + \vec{t}_M(S \rightarrow Wg)$.

- P : Pression normale de contact S/Wg.
 f : coefficient de frottement.
- $\vec{t}_M(S \rightarrow Wg)$: Pression tangentielle de contact S/Wg.
- La surface de contact est modélisée géométriquement par un disque creux de rayon intérieur R_i et de rayon extérieur R_e .
- La base $(\vec{x}_2, \vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée directe. $\theta = (\vec{y}_2, \vec{u}) = (\vec{z}_2, \vec{v})$. On donne $\vec{OM} = r\vec{u}$.

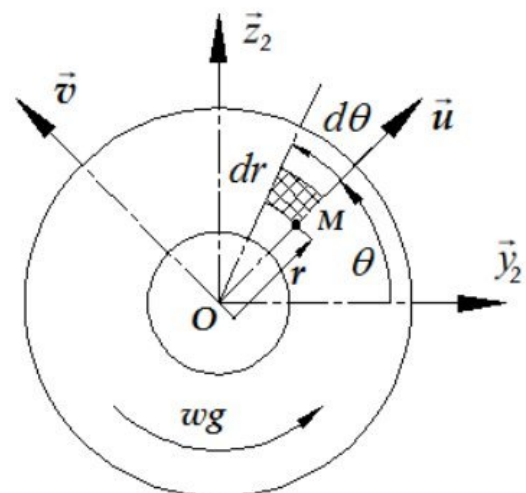


Figure 8 : Modélisation de la surface de contact

Question 13 :

a° Déterminer, par application des lois de Coulomb, l'expression de la pression tangentielle $\vec{t}_M(S \rightarrow Wg)$.

On définit le couple de freinage $C_{f2} = |\vec{x}_2 \cdot \vec{M}_O(S \rightarrow Wg)|$ avec $\vec{M}_O(S \rightarrow Wg)$ représente le moment des actions mécaniques en O modélisant globalement les actions de contact entre le disque de frein (S) et le plateau (Wg).

b° Déterminer l'expression de C_{f2} .

Etude du réducteur :

Objectif : justifier l'intérêt d'un réducteur Harmonic Drive, en le comparant avec un réducteur à train épicycloïdal.

Réducteur à train épicycloïdal :

Le schéma cinématique du réducteur est présenté sur la figure 9. Il est constitué de :

- Une couronne de nombre de dents Z_1 liée à l'arbre de sortie.
- Une couronne de nombre de dents Z_0 fixée au bâti 0.
- Deux pignons de nombre de dents Z_{2a} et Z_{2b} liés au satellite.
- Un porte satellite lié à l'arbre moteur.

$$\begin{aligned} Z_1 &= 100 \text{ dents} & Z_0 &= 66 \text{ dents} \\ Z_{2b} &= 30 \text{ dents} & Z_{2a} &= 20 \text{ dents} \end{aligned}$$

Question 14 :

Déterminer le rapport de réduction $\frac{\omega_{As}}{\omega_{Am}}$.

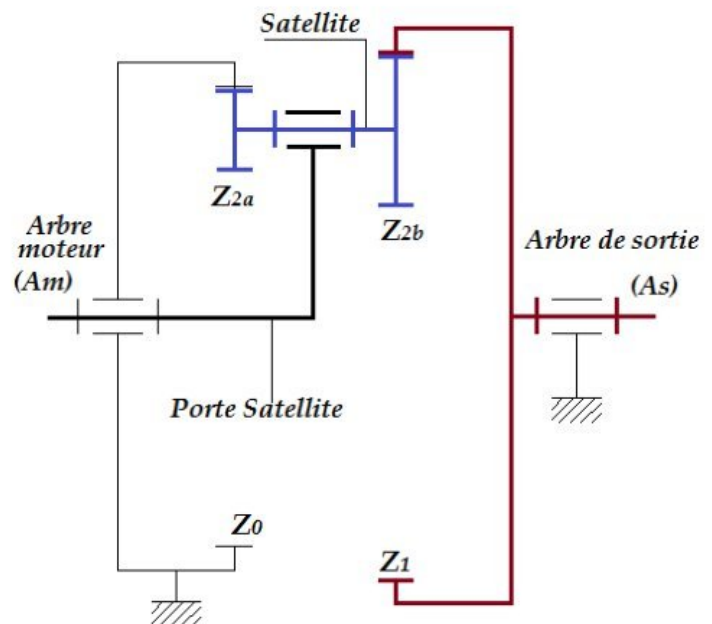


Figure 9 : Schéma du réducteur épicycloïdal

Etude du réducteur Harmonic Drive :

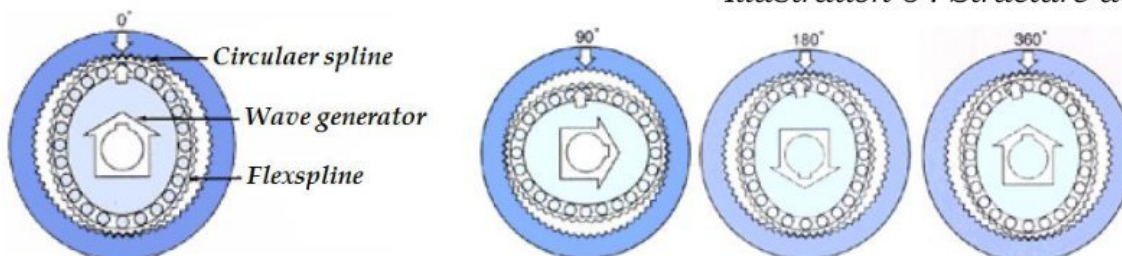
Le réducteur Harmonic Drive, intégré dans l'axe 2, joue à la fois le rôle de liaison pivot et de réducteur. Ce type de réducteur est composé essentiellement de 3 éléments (Illustration 6) :

Le Circular spline (lié au bâti 0) est une bague circulaire à denture intérieure. Le Flexspline (Fs) est une cloche en acier déformable à denture intérieure et le Wave generator (Wg) est un moyeu elliptique serti d'un roulement à billes, utilisé comme transmetteur de couple.

Le Flexspline (Fs) a un diamètre primitif légèrement inférieur à celui du Circular Spline et compte deux dents en moins. Il est déformé par le Wave Generator (Wg) elliptique. Le Flexspline engrène selon le grand axe de l'ellipse.



Illustration 6 : Structure du réducteur



Etude cinématique du réducteur :

Le réducteur Harmonic Drive peut être modélisé par le schéma cinématique ci-contre. Il est composé des éléments :

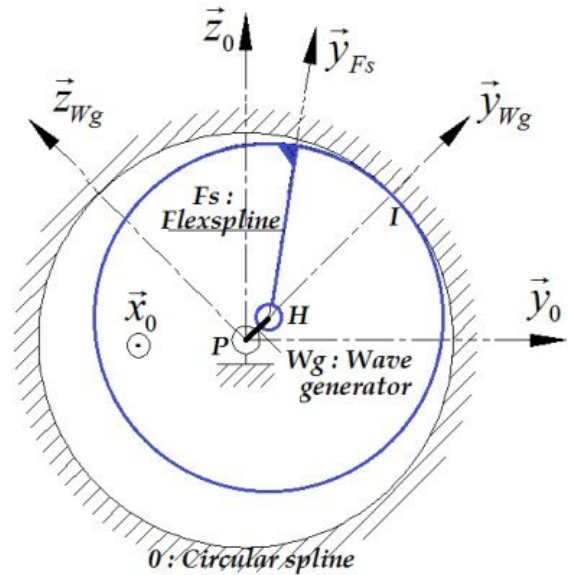
Circular spline (0) : bague circulaire à denture intérieure de nombre de dents Z_{CS} , de rayon R_C et de module m .

Wave generator (Wg) : assimilé à un excentrique en liaison pivot d'axe $(P, \vec{x}_0)$. On donne $\vec{PH} = r \cdot \vec{y}_{Wg}$.

Flexspline (Fs) : roue de nombre de dents Z_{FS} , de rayon R_F et de module m , en liaison pivot d'axe $(H, \vec{x}_0)$ avec Wave generator et en contact ponctuel en I avec Circular spline.

On donne : $\vec{\Omega}_{Wg/0} = \omega_{Wg} \cdot \vec{x}_0$ $\vec{\Omega}_{Fs/0} = \omega_{Fs} \cdot \vec{x}_0$ $\vec{\Omega}_{Fs/Wg} = \omega_{Fs/Wg} \cdot \vec{x}_0$ $2 \cdot R_F = m \cdot Z_{FS}$ $2 \cdot R_C = m \cdot Z_{CS}$

Figure 10 : Modélisation cinématique



Question 15 :

a°. En considérant le roulement sans glissement en I, déterminer le rapport de réduction $\frac{\omega_{Fs}}{\omega_{Wg}}$ en fonction des nombres de dents Z_{FS} et Z_{CS} .

b°. En rappelant que $Z_{CS} - Z_{FS} = 2$ dents, en déduire les valeurs de Z_{FS} et Z_{CS} . Expliquer l'intérêt de ce type de réducteur. (Voir diagramme 4 page 13)

Partie III : Analyse de la régulation en effort de l'axe 4 :

Objectif : Évaluation du comportement de l'asservissement en effort.

La translation du poignet est obtenue par un simple système pignon-crémaillère dont le pignon à un rayon de 5mm. Ce système est motorisé par un moteur Maxon F2140 associé à un réducteur de rapport 1/200. Un dispositif de rappel à tension constante est utilisé pour écarter la sonde du patient, en cas de coupure de courant.

Dans cette situation, la transmission est interrompue par un embrayage. Pour des raisons de compacité, la transmission est faite sur 2 axes parallèles, avec interposition d'un système poulie-courroie de rapport unitaire.

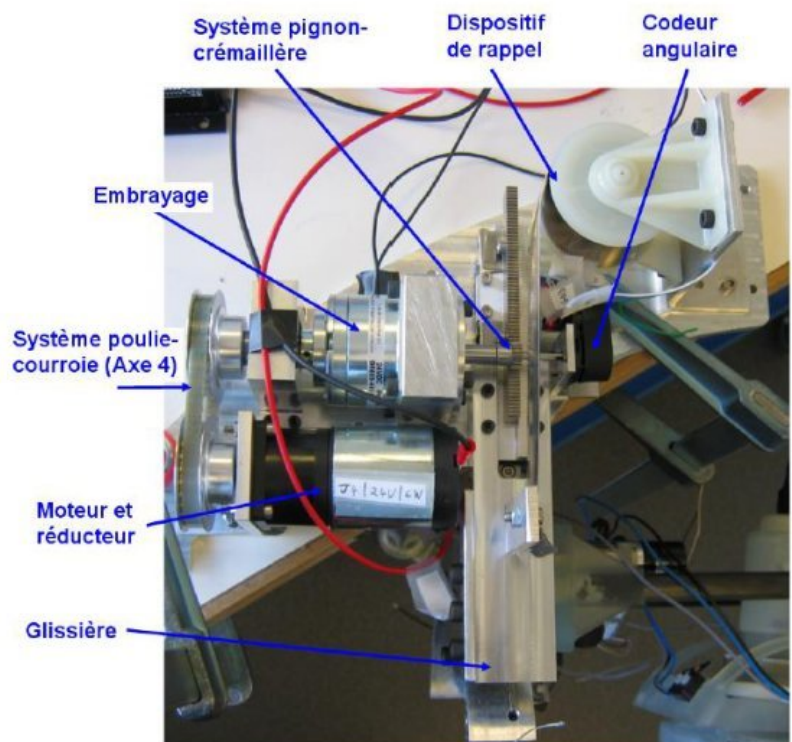
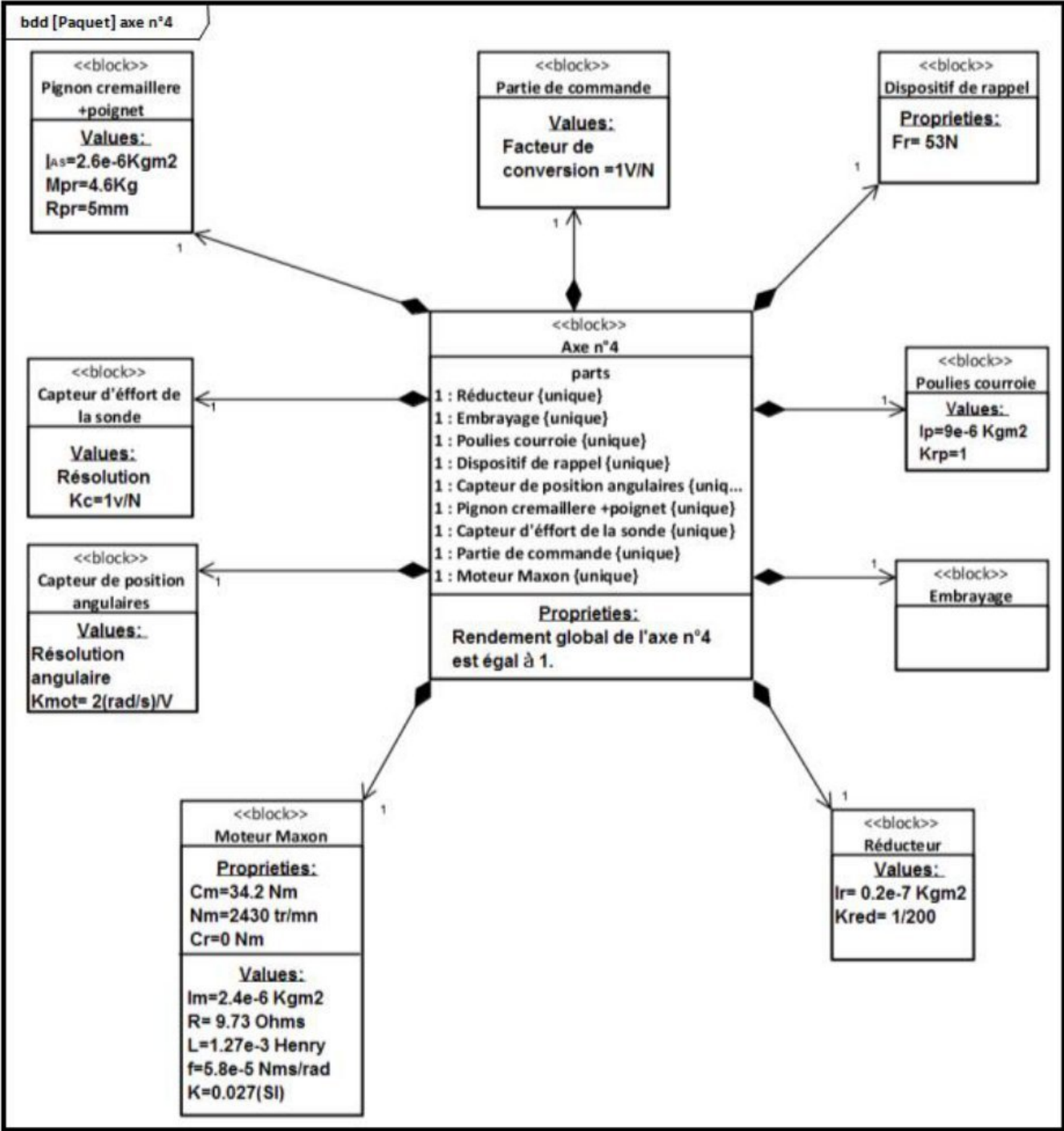


Illustration 7 : Structure de l'axe 4



La mesure de vitesse angulaire de l'arbre moteur est réalisée en aval du réducteur, au niveau du pignon.

La commande de l'axe 4 est réalisée à partir de la mesure de l'effort de contact de la sonde sur le patient, à l'aide d'un capteur intégré à la sonde.

Afin de valider la sécurité de la commande, un modèle sous forme de schéma-bloc est établi. Ce modèle permet notamment de faciliter la conception de la commande et de la partie opérative du mécanisme en fonction du comportement attendu en sortie.

La figure 11 page 19 représente le schéma bloc de l'asservissement

Les caractéristiques principales des éléments constituant l'axe 4 sont définies sur le tableau ci-dessous :

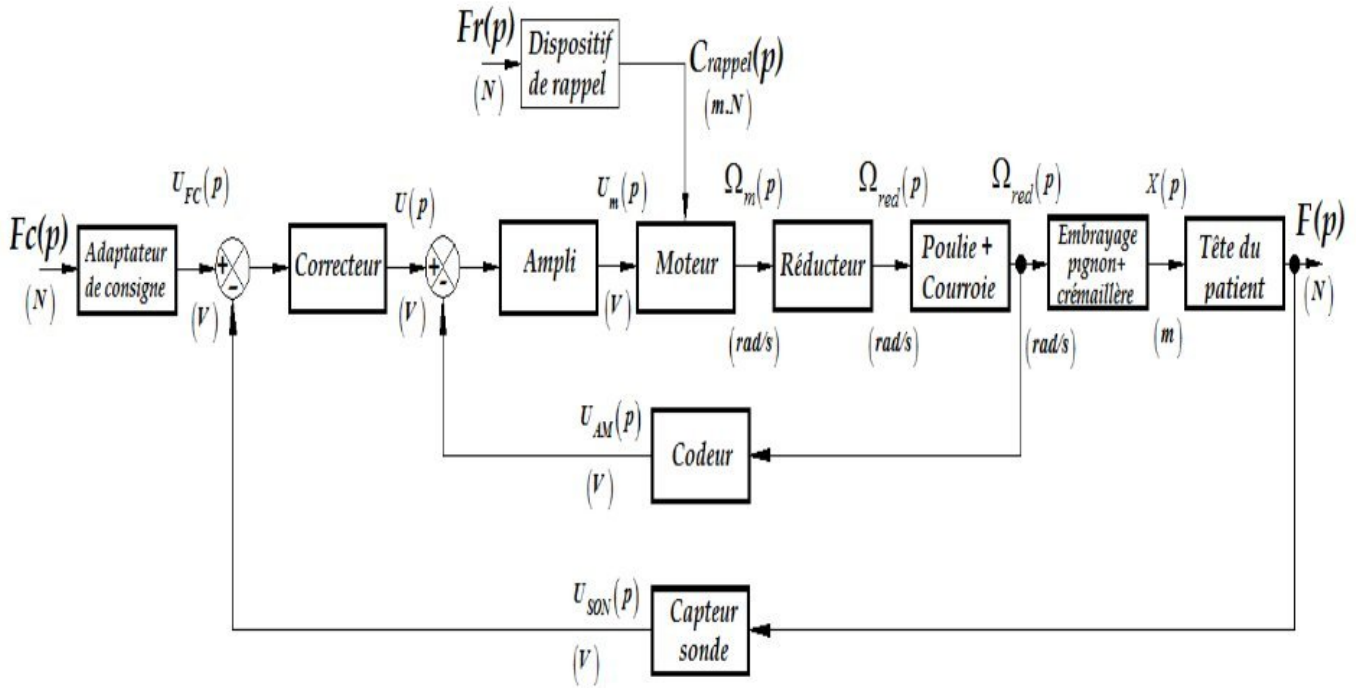
Nom du composant	Caractéristiques	Notation	Valeurs
Moteur Maxon	Inertie autour de l'axe moteur	I_m	$2,4.10^{-6} \text{ Kg.m}^2$
	Vitesse de rotation nominale	N_m	2430 tr/mn
	Couple moteur	C_m	$34,2 \text{ N.m}$
	Couple résistant	C_r	<i>négligé</i>
	Résistance électrique du moteur	R	$9,73. \Omega$
	Inductance du moteur	L	$1,27.10^{-3} .H$
	Constante de force contre-électromotrice	k	$0,027 \text{ rad/s.V}$
	Constante de couple	k	$0,027 \text{ N.m/A}$
	Coefficient de frottement visqueux	f	$5,8.10^{-5} \text{ N.m/(rad/s)}$
Capteur de position angulaire de l'arbre moteur	Résolution angulaire	K_{mot}	2 (rad/s)/V
Réducteur	Inertie équivalente ramenée à l'arbre de sortie du réducteur	I_r	$0,2.10^{-7} \text{ Kg.m}^2$
	Rapport de réduction	K_{red}	$1/200$
Poulies	Inertie autour de leur axe de rotation	I_p	9.10^{-6} Kg.m^2
	Rapport de réduction	K_{rp}	1
Arbre secondaire et pignon	Inertie autour de leur axe de rotation	I_{AS}	$2,6.10^{-6} \text{ Kg.m}^2$
	Rayon primitif du pignon	R_{pr}	5 mm
Crémaillère + poignet	Masse	M_{pr}	$4,6 \text{ Kg}$
Dispositif de rappel	Effort de rappel	F_R	53 N
Tête du patient	Raideur	K_T	5000 N/m
Capteur d'effort de la sonde	Résolution	K_F	1 V/N
Partie commande	Facteur de conversion	K_C	1 V/N
Axe 4	Rendement global de l'axe 4	η	1

On note :

$u_m(t)$ La tension aux bornes du moteur, $i(t)$ l'intensité, $e(t)$ la force électromotrice ;
 $\omega_m(t)$ La vitesse angulaire du moteur, $\omega_{red}(t)$ la vitesse angulaire en sortie de réducteur, $u_{AM}(t)$ Tension image de la vitesse angulaire en sortie de réducteur.

$F_c(t)$ Consigne de force, $u_{fc}(t)$ Tension image de la consigne. $F(t)$ L'effort de contact de la sonde sur le patient, $u_{son}(t)$ Tension image de l'effort de contact de la sonde sur le patient. $x(t)$ Déplacement.

Figure 11 : Schéma bloc de l'asservissement en effort



Par une étude mécanique on obtient l'équation modélisant le comportement dynamique de l'axe 4 :

$$I_{eq} \cdot \frac{d}{dt} \omega_m = C_m - f \cdot \omega_m - R_{pr} \cdot K_{red} \cdot F_R \quad I_{eq} = I_m + I_r \cdot K_{red}^2 + 2 \cdot I_p \cdot K_{red}^2 + I_{AS} \cdot K_{red}^2 + M_{pr} R_{pr}^2 \cdot K_{red}^2$$

Pour la suite on supposera que $I_{eq} \approx I_m$.

Modélisation du moteur :

Le comportement linéarisé du moteur autour de son point d'équilibre est modélisé par les quatre équations suivantes :

Équation mécanique : $C_m(t) - f \cdot \omega_m(t) - R_{pr} \cdot K_{red} \cdot F_R(t) = I_m \cdot \frac{d}{dt} \omega_m(t)$

Équation électrique : $U_m(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{d}{dt} i(t) + e(t)$

Équation de couplage tension / vitesse : $e(t) = k \cdot \omega_m(t)$

Équation de couplage couple / intensité : $C_m(t) = k \cdot i(t)$

En utilisant les quatre équations précédentes et en supposant les conditions initiales nulles, le schéma bloc de la figure 12 modélise le comportement du moteur + réducteurs.

On rappelle que $K_{rp} = 1$.

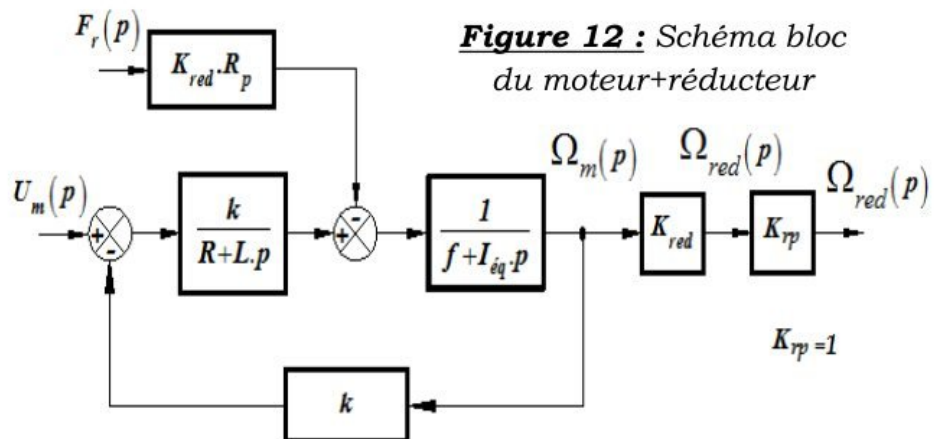
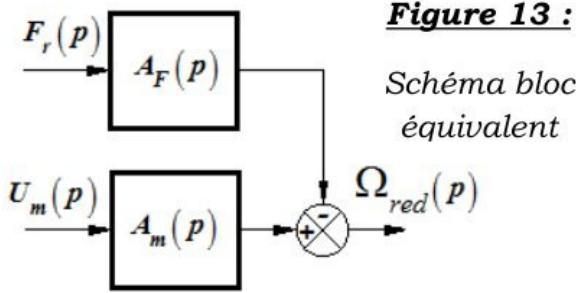


Figure 12 : Schéma bloc du moteur+réducteur

Le schéma bloc de la figure 12 peut se mettre sous la forme :



Les deux fonctions de transfert $A_m(p)$ et $A_F(p)$ sont notées :

$$A_m(p) = \frac{K_M}{1 + \frac{2z}{\omega_n} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$$

$$A_F(p) = \frac{K_R \cdot (1 + \tau \cdot p)}{1 + \frac{2z}{\omega_n} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$$

Question 16 :

a°- Déterminer les fonctions de transfert $A_m(p)$ et $A_F(p)$. En déduire les expressions des gains statiques K_M et K_R , de la constante du temps τ , du facteur d'amortissement z et de la pulsation propre ω_n .

b°- Déterminer l'expression de ω_{red} la vitesse de rotation à la sortie du réducteur en régime permanent pour un échelon de tension d'amplitude U_0 et un effort de rappel constant de module F_{r0} .

La figure R1 du document réponse **DR 2 (Page 25)** représente la réponse indicielle du moteur réducteur pour un échelon de tension d'amplitude $U_0 = 12(V)$ pour un effort de rappel supposé nul, $F_r = 0$.

Question 17 : Répondre sur le document réponse **DR2 (Page 25) :**

a°- Justifier, au vu de la réponse indicielle de la figure R1 du document réponse **DR2**, qu'on peut mettre $A_m(p)$ sous la forme $A_m(p) = \frac{K_M}{(1 + T_1 \cdot p) \cdot (1 + T_2 \cdot p)}$.

b°- En utilisant la méthode d'identification proposée sur le document réponse **DR2**, quelle hypothèse peut-on faire pour modéliser le système par un système du 1^{er} ordre ?

c°- On pose $A_m(p) = \frac{K_M}{1 + T_M \cdot p}$. Déterminer les valeurs de K_M et T_M .

La figure R2 du document réponse **DR 2 (Page 25)** représente la réponse indicielle du moteur réducteur pour un échelon d'effort de rappel d'amplitude $F_r = 53(N)$ et une de tension supposé nulle, $U_0 = 0(V)$. En considérant l'hypothèse de la question 17-b, on

pose $A_F(p) = \frac{K_R}{1 + T_M \cdot p}$.

Question 18 : Répondre sur le document réponse **DR2 (Page 25) :**

Déterminer les valeurs de K_R et T_M . En déduire la valeur de la vitesse du moteur - réducteur en régime permanent ω_{red} .

Le constructeur a fait le choix d'intégrer une boucle de vitesse de rotation du moteur. La mesure de la vitesse angulaire est réalisée en aval du réducteur. Le nouveau schéma bloc est défini sur la figure 14.

K_A est le gain de l'amplificateur.

On donne :

$$\Omega_{red}(p) = B_m(p) \cdot U(p) - B_F(p) \cdot F_r(p)$$

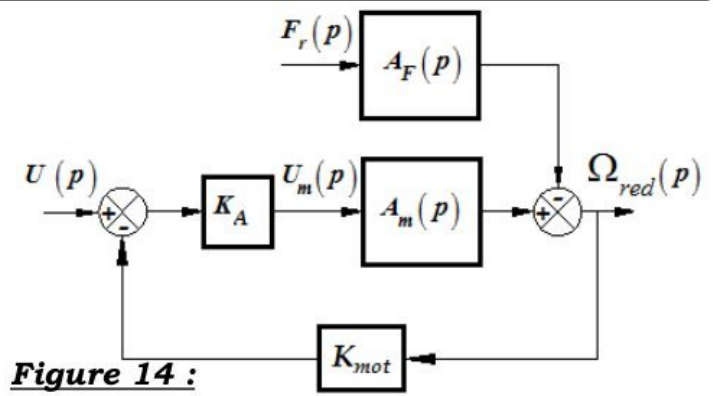


Figure 14 :

Question 19 :

Schéma bloc du moteur+réducteur avec chaîne de retour

a°- Déterminer, sous leurs formes canoniques, les fonctions de transfert $B_m(p)$ et $B_F(p)$ en fonction de K_A, K_{mot}, K_M, K_R et T_M .

b°- En analysant l'expression de ω_{red} , la vitesse de rotation à la sortie du réducteur en régime permanent pour un échelon de tension d'amplitude U_0 et un effort de rappel constant de module F_{r0} ainsi que la rapidité du moteur, expliquer l'intérêt de cette boucle de vitesse.

c°- Pour $K_A = 1$, donner, sous leurs formes numériques, les fonctions de transfert $B_m(p)$ et $B_F(p)$.

Asservissement de force :

L'asservissement de force peut être modélisé par le schéma bloc de la figure 15 :

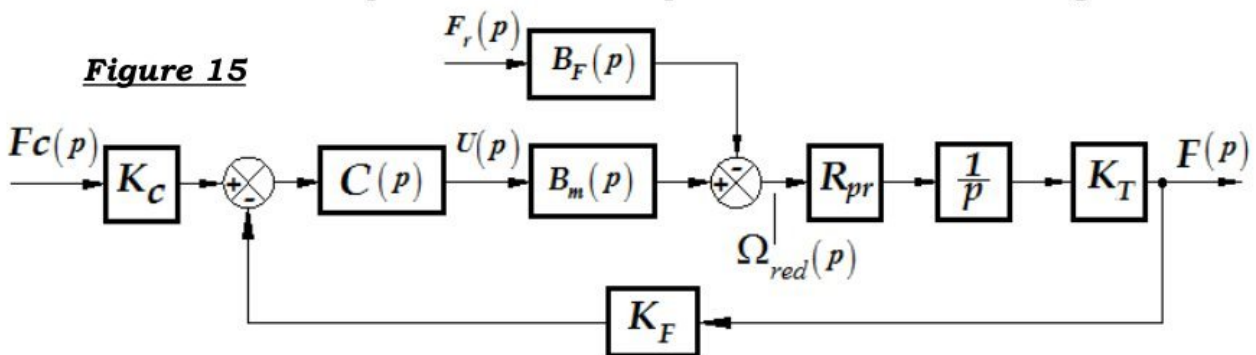


Figure 15

Pour la suite, on utilise les résultats suivants :

$$B_m(p) = \frac{G_M}{1 + T.p} ; \quad G_M = 0,086 \text{ (rad.s}^{-1}\text{/V)} \quad T = 0,015 \text{ (s)}$$

$$B_F(p) = \frac{G_R}{1 + T.p} ; \quad G_R = 7,8 \cdot 10^{-4} \text{ (rad.s}^{-1}\text{/N)}$$

Question 20 :

a°- Justifier le choix de $K_C = K_F$.

b°- Montrer que le schéma bloc de l'asservissement peut se mettre sous la forme du schéma de la figure 16 page 22.

c°- Déterminer les gains K_1 et K_2 en fonction de G_M, G_R, R_{pr}, K_F et K_T . Faire les applications numériques.

Les fonctions de transfert $H_1(p)$ et

$H_2(p)$ s'écrivent sous la forme :

$$H_2(p) = K_2 ;$$

$$H_1(p) = \frac{K_1}{p.(1+T.p)}$$

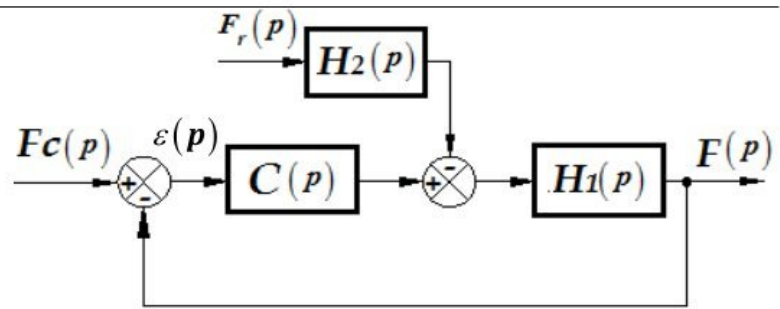


Figure 16 : Schéma bloc à retour unitaire

Correction proportionnelle : $C(p) = C$

Question 21 :

Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p)$. En déduire le gain K_{BO} , la classe et l'ordre de $H_{BO}(p)$.

Question 22 : On donne $K_1 = 2,15$.

Déterminer $C_{tr5\%}$ la valeur de C permettant d'avoir le système le plus rapide sans dépassement.

Sur la figure R3 du document réponse **DR3 (Page 26)**, on donne les diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte (F.T.B.O.) non corrigé ($C = 1$).

Question 23 : Voir Document Réponse **DR3 (Page 26)**.

a°- Déterminer puis représenter les marges de phase et de gain non corrigées.

b°- Représenter la marge de phase pour la valeur de $C_{tr5\%}$. Indiquer sa valeur.

Question 24 :

a°- En supposant $F_r=0$, donner l'erreur statique pour un échelon de consigne d'amplitude F_0 .

b°- En supposant $F_c=0$, déterminer l'erreur statique pour un échelon perturbateur d'amplitude F_{r0} .

Question 25 : La correction proportionnelle permet elle de respecter le cahier des charges ? Voir diagramme 2 des exigences page 4.

Correction proportionnelle intégrale : $C(p) = C \cdot \frac{1+T_i.p}{T_i.p}$

Question 26 :

Déterminer, en utilisant le critère de Routh les conditions sur C et T_i pour avoir un système stable.

On choisit $\frac{1}{T_i} = \frac{\omega_c}{10}$ où ω_c est la pulsation de coupure à 0 dB de la FTBO corrigée par le correcteur proportionnel intégral.

Question 27 :

- a°**- Déterminer ω_c telle que la marge de phase de la F.T.B.O. $M\phi = 60^\circ$. En déduire la valeur de T_i .
- b°**- Déterminer C telle que ω_c soit effectivement la pulsation de coupure à 0 dB de la FTBO corrigée.

Les figures R4 et R5 des documents réponses **DR3 (Page 26)** et **DR4 (Page 27)** représentent respectivement les diagrammes de Bode de la F.T.B.O. corrigée et la réponse indicielle de l'asservissement

Question 28 :

- a°**- Sur la figure R4 du document réponse **DR3 (Page 26)**, déterminer les nouvelles marges de gain et de phase.
- b°**- Sur la figure R5 du document réponse **DR4 (Page 27)**, déterminer :
- L'écart en régime permanent.
 - Le temps de réponse à 5%.
 - Le dépassement. Conclure.

La réponse indicielle de l'asservissement est donnée sur la figure R6 du document réponse **DR4 (Page 27)** avec un correcteur Proportionnel Intégral tel que $T_i = 6(s)$ et $C = 8$.

Question 29 :

- Sur la figure R6 du document réponse **DR4 (Page 27)**, déterminer
- L'écart en régime permanent.
 - Le temps de réponse à 5%.
 - Le dépassement. Conclure.

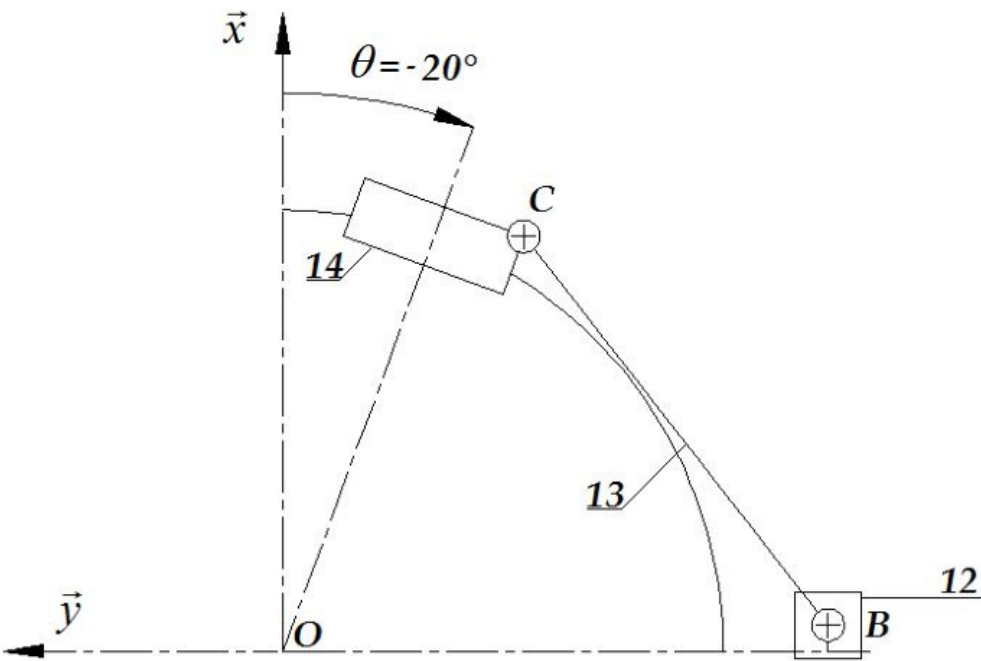
Question 30:

- Sur le document réponse **DR5 (Page 28)** :
- Tracer les diagrammes asymptotiques de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée avec un correcteur Proportionnel Intégral tel que $T_i = 6(s)$ et $C = 8$. (avec justification de vos tracés)
 - Déterminer Les marges de gain et de phase. Conclure.

FIN DE L'ÉNONCÉ

Document Réponse **DR1**

Echelle : $\|\vec{V}(B,12/0)\| \longrightarrow 3(cm)$



Question 3-a :.....

Question 3-b :.....

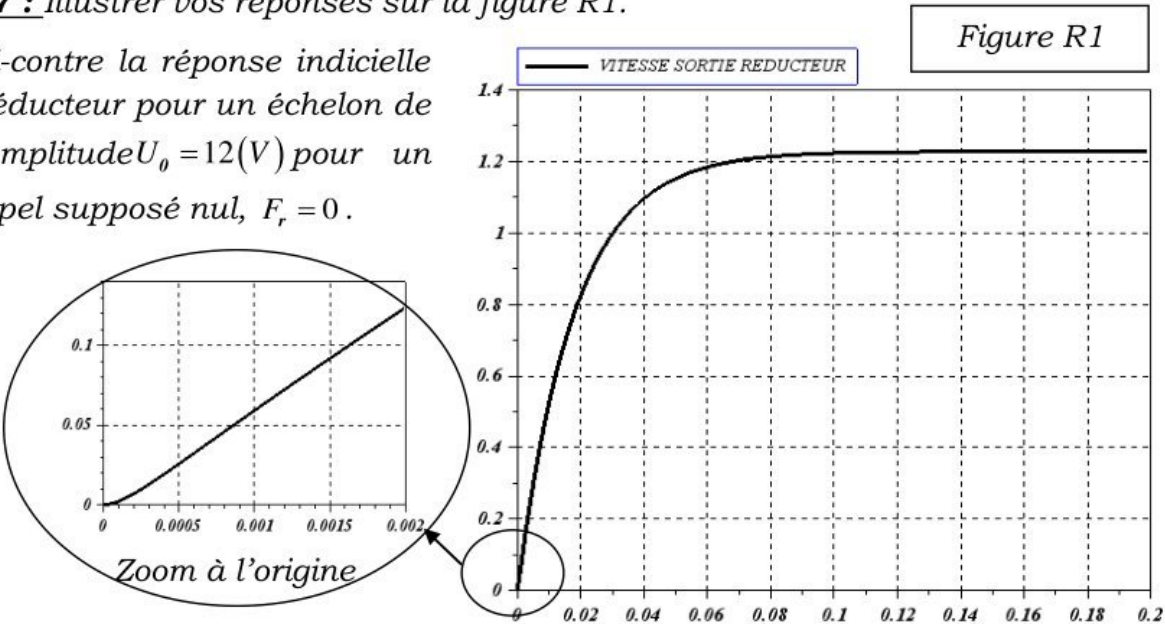
Question 3-c :.....

Document Réponse

DR2

Question 17 : Illustrer vos réponses sur la figure R1.

On donne ci-contre la réponse indicielle du moteur réducteur pour un échelon de tension d'amplitude $U_0 = 12(V)$ pour un effort de rappel supposé nul, $F_r = 0$.



Méthode d'identification :

Si $T_1 \ll T_2$ on peut approximer T_1 comme l'intersection de la tangente au point d'inflexion de la courbe avec l'axe des abscisses. La valeur de $T_1 + T_2$ est obtenue par l'intersection de cette tangente avec l'asymptote à l'infini.

Question 17-a° :

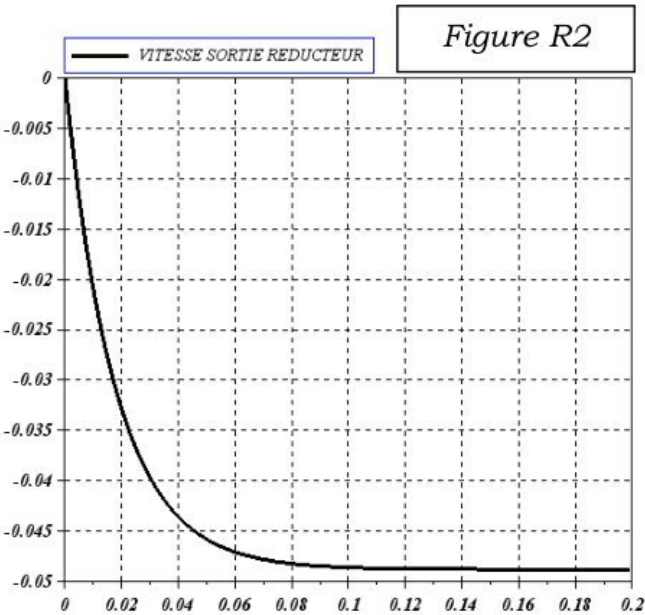
Question 17-b° :

Question 17-c° :

On donne ci-contre la réponse indicielle du moteur réducteur pour un échelon d'effort de traction d'amplitude $F_r = 53(N)$ et une de tension supposé nulle, $U_0 = 0$.

Question 18 :

Illustrer vos réponses sur la figure R2



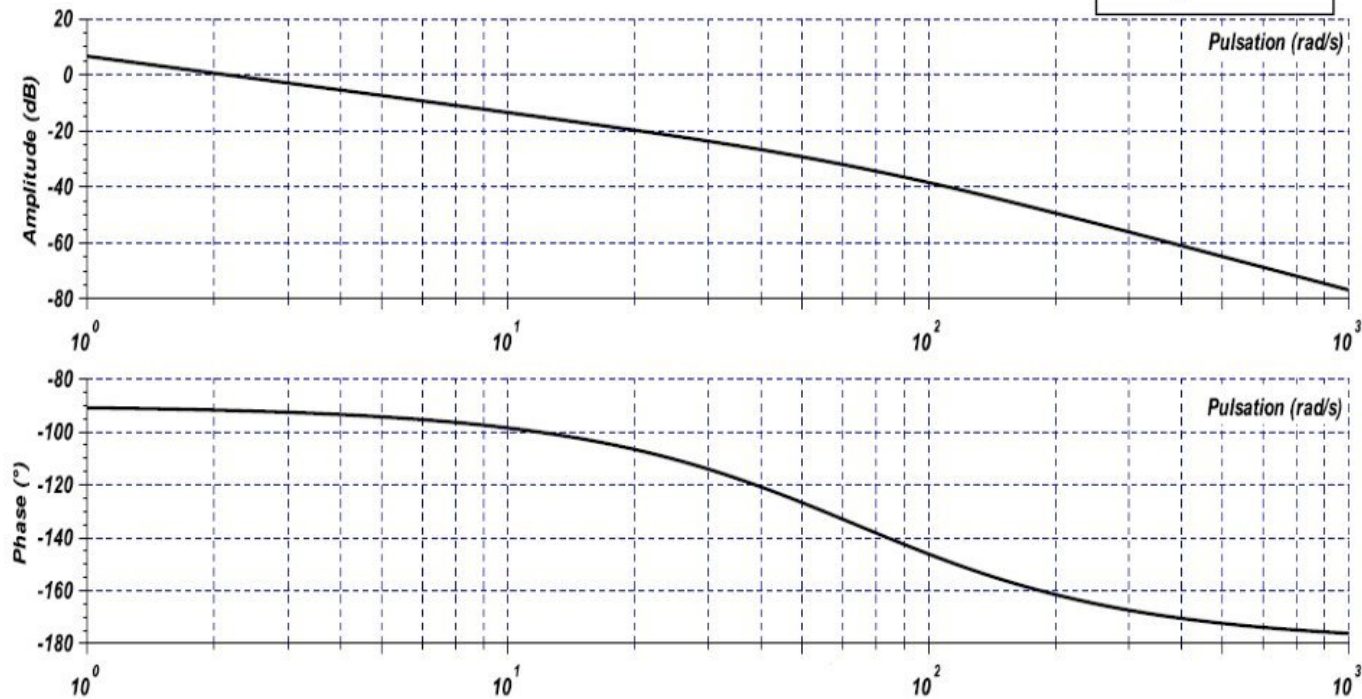
Document Réponse **DR3**

Question 23 : Illustrer vos réponses sur la figure R3 ci-dessous.

a° - Pour $C = 1$; Marge de phase :
Marge de gain :

b° - Pour $C = C_{tr5\%} = \dots\dots\dots$; Marge de phase :

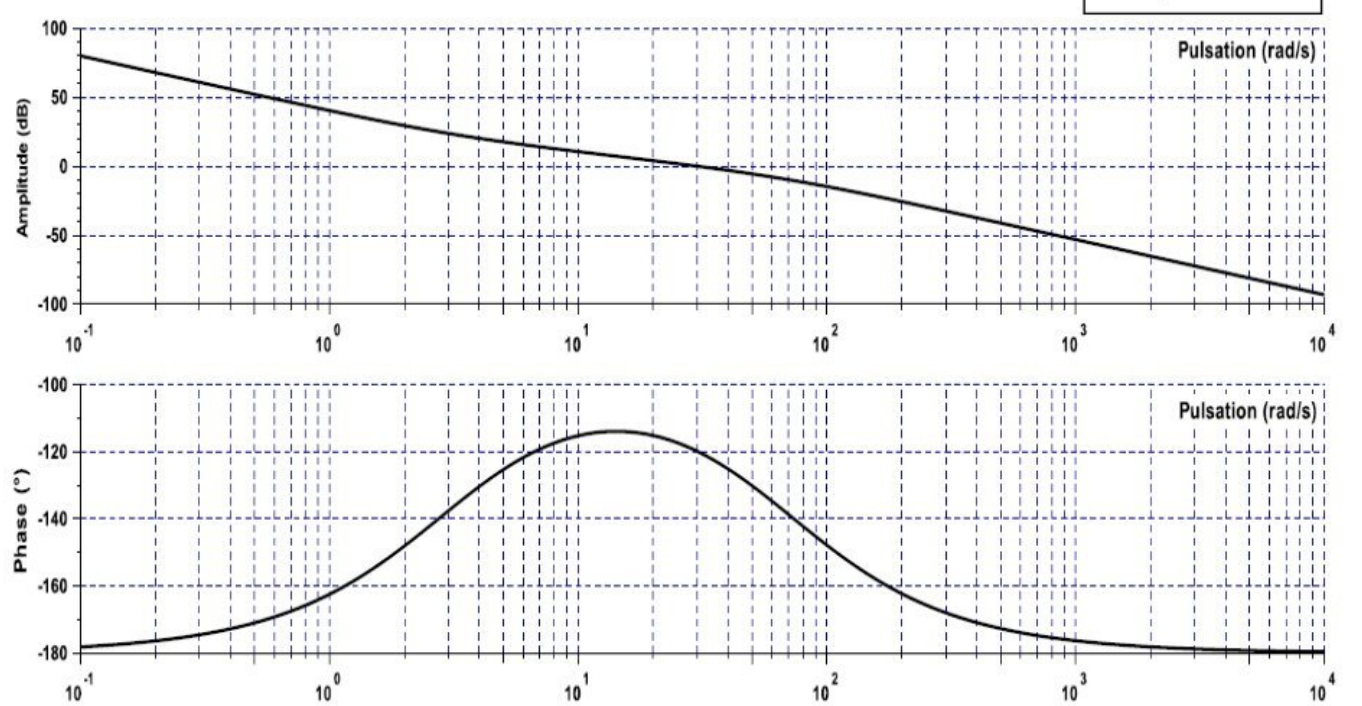
Figure R3



Question 28 : Illustrer vos réponses sur la figure R4 ci-dessous.

a° - Marge de phase :
- Marge de gain :

Figure R4



Document Réponse **DR4**

Question 28 : Illustrer vos réponses sur la figure R5 ci-dessous.

b°- Sur le document réponse **DR4**, déterminer :

- L'écart en régime permanent :
- Le temps de réponse à 5% :
- Le dépassement :

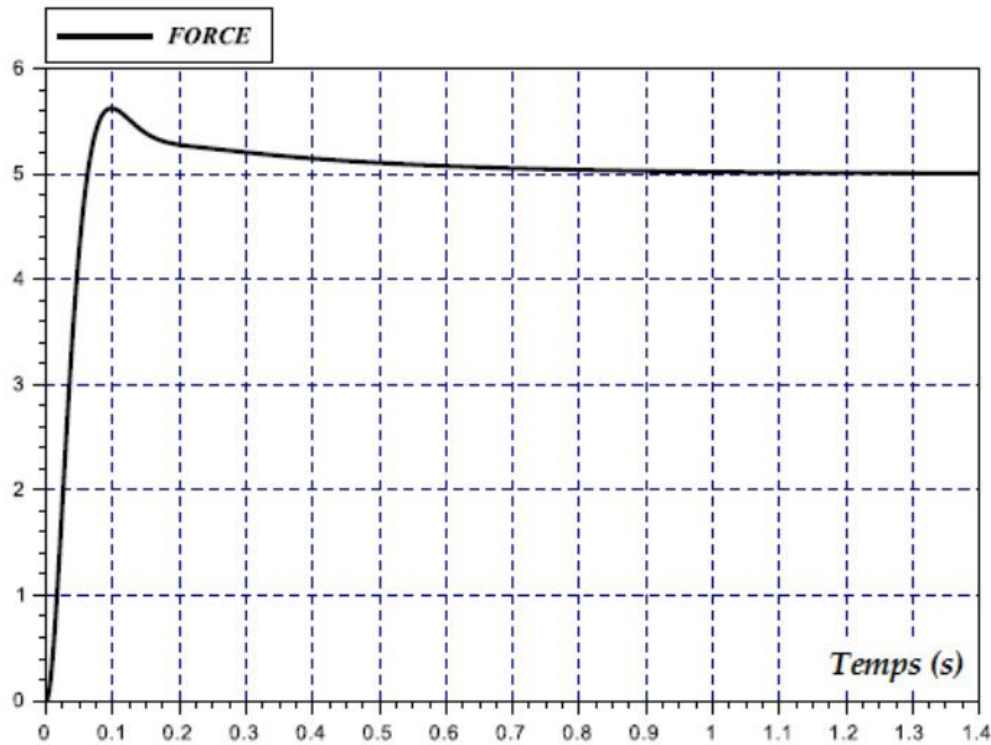


Figure R5

Conclusion :

Question 29 : Illustrer vos réponses sur la figure ci-contre.

L'écart en régime permanent.

Le temps de réponse à 5%.

Le dépassement.

Conclusion.

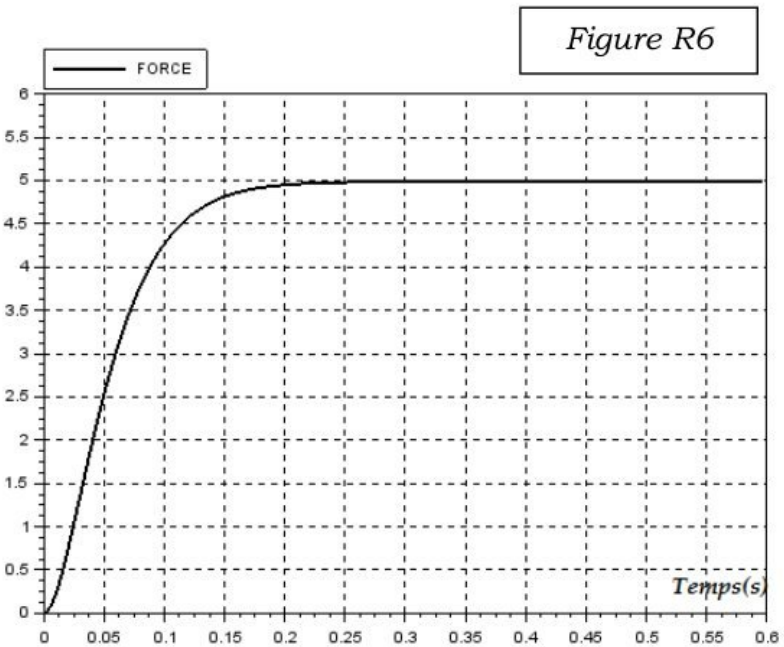


Figure R6

Document Réponse **DR5**

Question 30 :
Expression numérique de la F.T.B.O. corrigée :

Justifications des tracés :

