

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale
et de la Jeunesse

Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs Session 2003

ÉPREUVE DE PHYSIQUE II

Durée 4 heures

Concours **MP**

Cette épreuve comporte 9 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *autorisé*

**L'énoncé de cette épreuve comporte 9 pages.
L'usage de la calculatrice est autorisé.**

On veillera à une présentation claire et soignée des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les **références** des questions abordées.

Quelques aspects de la conduction thermique

L'épreuve, qui aborde quelques aspects des transferts thermiques, est constituée de trois parties largement indépendantes entre elles. Il est toutefois conseillé de les traiter dans l'ordre proposé.

La première partie du problème rappelle quelques notions fondamentales de la conduction thermique. La deuxième partie propose d'étudier l'un des dispositifs utilisés par Joseph FOURIER pour l'étude de ce phénomène. La troisième partie, quant à elle, propose l'étude du principe d'une mesure optique d'un coefficient de transfert thermique conducto-convectif.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

On étudie dans ce problème la conduction de la chaleur, ou diffusion thermique, dans un milieu isotrope, homogène, supposé incompressible, de masse volumique ρ , de capacité thermique c et de conductivité thermique λ . On désigne par h le coefficient de transfert conducto-convectif entre le solide et l'air, lorsque le solide est en contact direct avec l'air ambiant. Ces quatre grandeurs ρ , c , λ et h sont supposées indépendantes de la température T .

Données utiles

- Masse volumique du fer : $\rho = 7,86 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$;
- Capacité thermique du fer : $c = 460 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$;
- Conductivité thermique du fer : $\lambda = 81 \text{ u.S.I.}$;
- Coefficient de transfert conducto-convectif du fer au contact de l'air : $h = 10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$;
- Conductivité thermique de l'air : $\lambda_a = 2,65 \times 10^{-2} \text{ u.S.I.}$;
- $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$;
- $\cosh 2x = 2 \sinh^2 x + 1$;
- $\cosh(a + b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b$.

1^{ère} partie**Transfert thermique conductif dans un barreau****1.1. Loi de Fourier**

1.1.1. Énoncer la loi de FOURIER pour la conduction de la chaleur et en préciser les conditions de validité. Définir les différentes grandeurs utilisées et en préciser l'unité dans le système international des unités (S.I.).

1.1.2. Quels sont les analogues électriques des notions suivantes : conductivité thermique, flux thermique, loi de FOURIER et gradient de température $\vec{\nabla}T$? On pourra répondre sous la forme d'un tableau.

1.2. Équation de la chaleur

On considère un barreau (figure 1) solide, homogène et isotrope, indéformable de longueur L , de section droite carrée de surface S et dont le côté est très inférieur à la longueur L . Ce barreau est entouré par une enveloppe adiabatique non représentée sur la figure. On considère qu'il n'y a aucune fuite thermique par la surface latérale et que la température est uniforme sur une section droite du barreau et ne dépend que de son abscisse x et du temps t . Les extrémités $x = 0$ et $x = L$ de ce barreau sont en contact avec deux sources isothermes de chaleur de températures respectivement égales à T_1 en $x = 0$ et T_2 en $x = L$; avec $T_1 > T_2$.

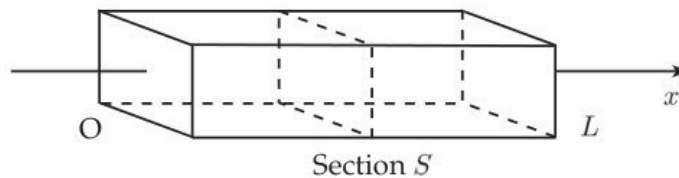


Figure 1: Barreau solide homogène, isotrope et indéformable de section S et de longueur L .

1.2.1. En effectuant un bilan énergétique pour la partie de barreau située entre les sections d'abscisses x et $x + dx$, montrer que la température $T(x, t)$ dans le barreau est solution de l'équation différentielle aux dérivées partielles, appelée équation de la chaleur :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

1.2.2. Temps caractéristique de la diffusion thermique

En régime non stationnaire, pour une diffusion thermique s'effectuant sur une distance d , il faut une durée de l'ordre de τ_d pour que toute variation ΔT de température se manifeste. τ_d est appelé temps caractéristique de la diffusion thermique.

1.2.2.1. En utilisant l'équation de la chaleur (1), construire la grandeur τ_d à partir des grandeurs ρ , c , λ et d .

1.2.2.2. Calculer le temps caractéristique de la diffusion thermique dans le cas du fer pour les extensions spatiales $d_1 = 10$ cm et $d_2 = 50$ cm. Commenter.

1.2.3. Résistance thermique

On se place en régime *stationnaire*.

1.2.3.1. Déterminer l'expression de la température $T(x)$ dans une section droite du barreau.

1.2.3.2. Établir la relation entre le flux thermique Φ traversant une section droite du barreau en régime stationnaire et les températures T_1 et T_2 .

1.2.3.3. En déduire l'expression de la résistance thermique R_{th} du barreau que l'on définira. Commenter

2^{ème} partie

Transfert thermique conductif dans un anneau (FOURIER, 1806)

Un des dispositifs utilisés par J. FOURIER était constitué d'un anneau solide indéformable en fer homogène et isotrope représenté figure 2, ayant la forme d'un tore d'axe Oz , de rayon moyen R et de section carrée de côté ℓ , avec ℓ très inférieur à R . Plusieurs petites loges de dimensions négligeables, remplies de mercure et dans lesquelles plongent des thermomètres, sont percées en divers endroits de l'anneau.

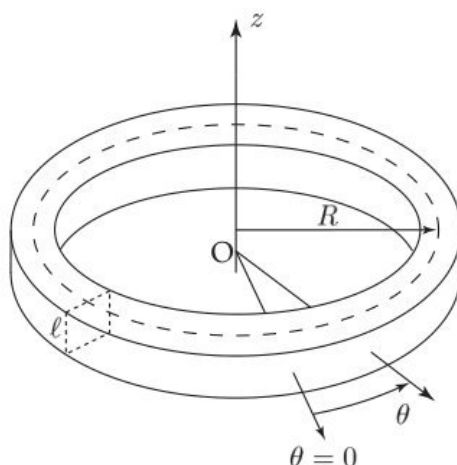


Figure 2: Anneau solide homogène, isotrope et indéformable de rayon moyen R et de section carrée de côté $\ell \ll R$.

Dans une section droite de l'anneau prise pour origine des angles ($\theta = 0$), on place un dispositif de chauffage constitué d'une plaque d'épaisseur négligeable et de même section ($\ell \times \ell$) que l'anneau. On considère que la température est uniforme sur toute section droite du barreau et ne dépend que de l'angle θ et du temps t . Dans toute la suite du problème, et sauf mention explicite du contraire, on limitera l'angle θ à l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Pour les applications numériques, on prendra $R = 16,0$ cm et $\ell = 3,30$ cm.

2.1. Équation de la chaleur avec fuites thermiques

L'anneau est placé dans l'air ambiant de température T_e , uniforme et indépendante du temps. Selon la loi de NEWTON, le flux thermique conducto-convectif sortant par l'élément de surface latérale dS_{lat} de l'anneau et donc cédé à l'air ambiant, vaut $\delta\varphi = h(T - T_e) dS_{lat}$, où h est le coefficient de transfert conducto-convectif entre le métal et l'air, que l'on suppose constant, et T la température de la portion d'anneau considérée à l'instant t .

2.1.1. Quel est l'intérêt pratique de remplir les loges par du mercure ?

2.1.2. En effectuant un bilan énergétique pour la partie d'anneau située entre les sections repérées par les angles θ et $\theta + d\theta$, montrer que la température $T(\theta, t)$ en tout point de l'anneau

est solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{4h}{\lambda \ell} (T_e - T) \quad (2)$$

On se place désormais en régime stationnaire.

2.1.3. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la température $T(\theta)$ dans l'anneau et en donner la solution générale. On introduira la grandeur $a = \sqrt{\frac{\lambda \ell}{4h}}$ dont on précisera la dimension.

2.1.4. On suppose que le dispositif de chauffage impose une température constante $T = T_c$ dans la tranche infiniment mince de l'anneau repérée par l'angle $\theta = 0$. En exploitant les conditions aux limites en $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi$, déterminer toutes les constantes d'intégration introduites dans la question précédente et donner l'expression de la température $T(\theta)$ au sein de l'anneau.

2.1.5. Représenter graphiquement l'allure de la température $T(\theta)$ dans le barreau pour θ compris entre 0 et 2π et commenter le résultat obtenu.

2.1.6. Exprimer le flux thermique $\Phi(\theta)$ à travers une section droite de l'anneau repérée par l'angle θ et représenter graphiquement l'allure de $\Phi(\theta)$ pour θ variant entre 0 et 2π . Commenter la valeur de Φ en $\theta = \pi$. Le flux thermique Φ est-il continu à la traversée du dispositif de chauffage ? Pourquoi ? Commenter.

On se limite au domaine où θ est compris entre 0 et π . Un thermomètre 1 est placé dans la section A_1 , repérée par l'angle $\theta_1 = \theta_2 - \Delta\theta$ avec $\Delta\theta > 0$; un thermomètre 2 est placé dans la section A_2 repérée par l'angle θ_2 enfin un thermomètre 3 est placé dans la section A_3 , repérée par l'angle $\theta_3 = \theta_2 + \Delta\theta$. On pose $\Delta T_i = T(\theta_i) - T_e$. D'après FOURIER, le rapport $q = \frac{\Delta T_1 + \Delta T_3}{\Delta T_2}$ ne dépend que des dimensions ou de la nature de l'anneau et non de la manière dont ce solide est chauffé.

2.1.7. Montrer qu'effectivement ce rapport q ne dépend ni de θ_2 ni de la température T_e .

2.1.8. Calculer le rapport théorique q_{th} pour $\Delta\theta = \pi/4$ pour le dispositif de FOURIER.

Sur le cahier d'expériences de FOURIER du 31 juillet 1806, on lit : « deux heures après le début de chauffage, les valeurs des températures des différentes sections de l'anneau sont stationnaires et les thermomètres indiquent, par des lectures au tiers de degré près : 17,67 °C pour l'air ambiant, 66,00 °C pour $\theta_1 = \pi/2$, 50,67 °C pour $\theta_2 = 3\pi/4$ et 44,00 °C pour $\theta_3 = \pi$ ».

2.1.9. Commenter ce passage en calculant en particulier le temps caractéristique de diffusion thermique correspondant à la distance $d = \pi R$ ainsi que le rapport expérimental q_{ex} .

2.2. Équation de la chaleur en régime variable

L'anneau représenté figure 2, chauffé comme précédemment en $\theta = 0$, est isolé du dispositif de chauffage puis enfoui dans du sable, excellent isolant thermique. On suppose qu'il n'y a aucune fuite thermique par la surface latérale de l'anneau une fois que celui-ci est enfoui dans le sable. La température T de l'anneau est alors uniforme sur une section droite de l'anneau et dépend comme précédemment de l'angle θ mais aussi du temps t puisque le régime est supposé non stationnaire. On se limite encore au domaine où θ est compris entre 0 et 2π .

2.2.1. Donner l'équation différentielle aux dérivées partielles dont la température $T(\theta, t)$ est solution.

On se propose de déterminer la solution générale de cette équation en utilisant la méthode dite « de séparation des variables ». Pour cela on commence tout d'abord par chercher une solution particulière de cette équation différentielle sous la forme :

$$T(\theta, t) = K + f(\theta) g(t) \quad (3)$$

où K est une constante et f et g deux fonctions bornées des variables θ et t respectivement.

2.2.2. Montrer que l'équation différentielle de la question 2.2.1. peut alors se mettre sous la forme :

$$\frac{\rho c}{\lambda} \frac{1}{g(t)} \frac{dg(t)}{dt} = \frac{1}{R^2} \frac{1}{f(\theta)} \frac{d^2 f(\theta)}{d\theta^2} \quad (4)$$

2.2.3. Montrer que chaque membre de l'équation (4) ne peut être égal qu'à une même constante réelle Ω .

2.2.4. Montrer que la constante Ω est impérativement négative de sorte que l'on puisse écrire : $\Omega = -\frac{1}{d^2}$. Quelle est la dimension de d ?

2.2.5. En déduire la solution $f(\theta)$ de l'équation (4).

2.2.6. Résoudre de même l'équation (4) en $g(t)$ et montrer que l'on peut écrire :

$$g(t) = g_0 \exp -\frac{t}{\tau} \quad (5)$$

Donner l'expression de τ en fonction de ρ , c , λ et d .

On impose à la solution particulière (3) de vérifier les conditions aux limites, d'une part sur $T(\theta, t)$ en $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi$ et d'autre part sur le flux thermique $\Phi(\theta, t)$ en $\theta = 0$.

2.2.7. Exprimer le flux thermique $\Phi(\theta, t)$ traversant une section droite de l'anneau et simplifier l'expression (3) de $T(\theta, t)$ en exploitant la condition au limite $\theta = 0$ sur le flux thermique.

2.2.8. Montrer alors que la solution (3) de l'équation de la chaleur peut se mettre sous la forme :

$$T_n(\theta, t) = K_n + A_n \cos \frac{R\theta}{d_n} \exp -\frac{t}{\tau_n} \quad (6)$$

et donner les expressions de d_n et τ_n en fonction de ρ , c , λ , R et d'un entier naturel non nul n .

2.2.9. Montrer alors que la solution *générale* de l'équation de la chaleur satisfaisant aux conditions aux limites précédentes, peut s'écrire sous la forme :

$$T(\theta, t) = T_m + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\theta) \exp -\frac{t}{\tau_n} \quad (7)$$

Que représente T_m physiquement ? Comment peut-on calculer les coefficients A_n ?

2.2.10. Déterminer les valeurs numériques des constantes de temps τ_1 du fondamental et τ_2 et τ_3 du deuxième et troisième harmonique.

2.2.11. Commenter et expliquer les propos de FOURIER : « lorsque l'on mesure la température en fonction du temps en différents points de l'anneau, on constate que l'état de l'anneau ne tarde pas à se confondre avec celui pour lequel les écarts des températures des différents points par rapport à la température

moyenne sont proportionnels aux cosinus des angles qui mesurent les distances à l'origine, la disposition initiale n'apportant aucun changement à ces résultats... ».

3^{ème} partie

Mesure optique d'un coefficient de transfert conducto-convectif

On se propose, dans cette partie du problème, d'étudier le principe d'un montage¹ permettant de mesurer le coefficient de transfert thermique conducto-convectif à la surface d'un métal placé dans l'air au repos.

Le montage utilise une technique interférométrique pour relever le profil de température $T(x)$ au-dessus d'une plaque métallique $\mathcal{P}$ portée à une température T_s et placée dans l'air ambiant dont la température est T_∞ loin de la plaque chauffée. Pour les applications numériques, on prendra $T_s = 328$ K et $T_\infty = 294$ K.

La surface libre du métal est supposée occuper le plan $x = 0$.

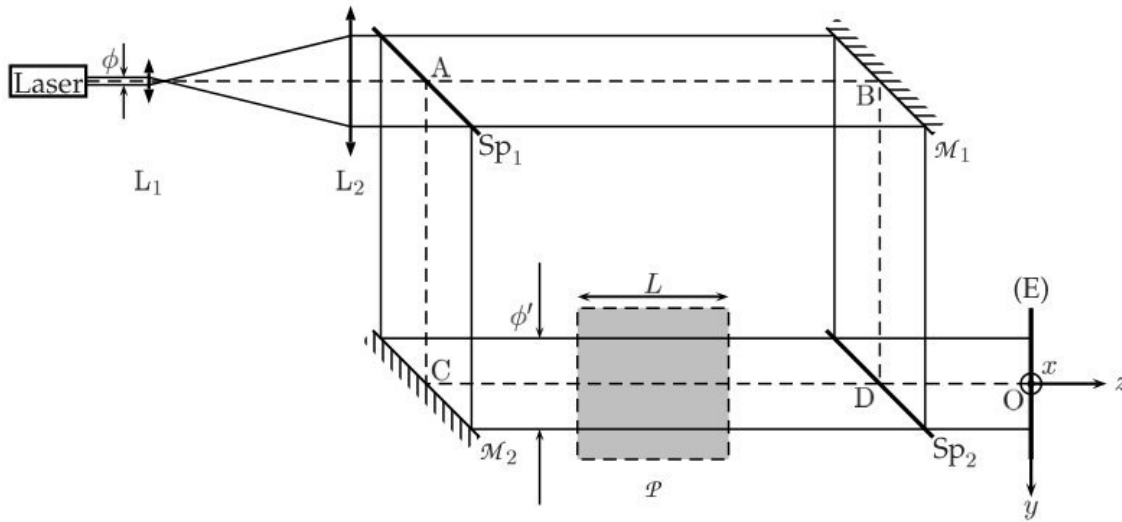


Figure 3: Interféromètre de MACH-ZEHNDER.

La technique utilisée repose sur la dépendance de l'indice de réfraction de l'air vis-à-vis de sa température thermodynamique T . Cette dépendance est supposée vérifier la loi approchée suivante, que l'on ne demande pas de justifier :

$$n(T) = 1 + \frac{A}{T} \quad (8)$$

où A est une constante positive.

Le dispositif interférentiel utilisé est un interféromètre de MACH-ZEHNDER (figure 3). Il est composé de deux miroirs plans parfaitement réfléchissants $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ et de deux lames semi-transparentes Sp_1 et Sp_2 d'épaisseurs négligeables. Les deux miroirs $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ ainsi que les deux lames semi-transparentes Sp_1 et Sp_2 sont inclinés de 45° et parallèles entre eux. Les distances AB et CD d'une part, AC et BD d'autre part sont égales.

La plaque métallique $\mathcal{P}$ est placée dans le bras CD de l'interféromètre de sorte que, lorsqu'elle est portée à la température T_s supposée uniforme, elle crée dans l'air une variation de température $T(x)$ perpendiculairement à sa surface. Dans toute cette étude, on supposera que la longueur L des côtés de la plaque carrée $\mathcal{P}$ est suffisamment grande pour pouvoir négliger tous les effets de bord. La figure 3 représente l'ensemble du dispositif vu de dessus alors que la figure 4 est une vue de profil de la plaque éclairée par le faisceau du bras CD de l'interféromètre.

¹C. ROLDÁN et al., Eur. J. Phys. 14 (1993) 128–131.

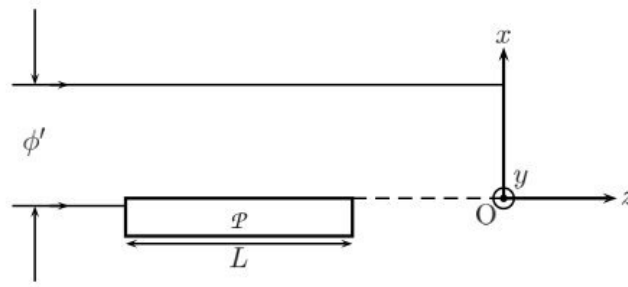


Figure 4: Vue de profil de la plaque P placée dans le bras CD de l'interféromètre. La lame semi-transparente Sp_2 n'est pas représentée sur ce schéma.

Le dispositif expérimental est éclairé à l'aide d'un laser HeNe de longueur d'onde $\Lambda = 632,8 \text{ nm}$. On note ϕ le diamètre du faisceau laser supposé cylindrique. On supposera également que l'intensité lumineuse du faisceau laser est constante sur une section principale du faisceau.

3.1. Afin de pouvoir éclairer toute la zone de variation de température au dessus de la plaque P (figure 4), on élargit le faisceau laser initial de diamètre ϕ pour obtenir un faisceau laser cylindrique de travail de diamètre ϕ' . Pour cela, on utilise un montage télescopique constitué de deux lentilles convergentes L_1 et L_2 de distances focales image f_1 et f_2 .

3.1.1. Comment doit-on placer les deux lentilles L_1 et L_2 l'une par rapport à l'autre afin d'obtenir un faisceau cylindrique de diamètre ϕ' à la sortie à partir d'un faisceau cylindrique de diamètre ϕ à l'entrée ? On exprimera la distance O_1O_2 en fonction de f_1 et f_2 .

3.1.2. Exprimer le rapport $\frac{\phi'}{\phi}$ en fonction de f_1 et f_2 .

3.2. On se propose tout d'abord d'étudier quelques propriétés de la figure d'interférence. Pour cela, on note, au niveau de l'écran d'observation (E) :

- I_1 l'intensité lumineuse de l'onde qui passe par la voie (1), ABD, de l'interféromètre ;
- I_2 l'intensité lumineuse de l'onde qui passe par la (2), ACD, de l'interféromètre ;
- φ le déphasage entre ces deux ondes en un point M quelconque de l'écran d'observation.

3.2.1. Exprimer l'intensité résultante I en un point quelconque de l'écran d'observation en fonction de I_1 , I_2 et φ .

3.2.2. Donner la représentation graphique de I en fonction de φ et déterminer la valeur maximale $I_{\max}$ ainsi que la valeur minimale $I_{\min}$ de I .

3.2.3. Montrer que le contraste C de la figure d'interférence défini par $C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$ ne dépend que du rapport des intensités $R = \frac{I_1}{I_2}$ et tracer les variations de C en fonction de R .

3.2.4. Pour quelle valeur de R le contraste C est-il maximum ? Quelles précautions pratiques doit-on prendre pour obtenir le contraste maximum ?

3.3. On se propose à présent de montrer que le relevé de l'interférogramme $I(x)$ permet de déterminer le profil de température au-dessus de la plaque P .

3.3.1. Décrire l'allure de la figure d'interférence dans le plan de l'écran d'observation (E) et montrer que les surfaces d'égale intensité du champ d'interférence correspondent à des surfaces isothermes du profil de température au-dessus de la plaque $\mathcal{P}$.

3.3.2. Exprimer l'ordre d'interférence p , défini par $\varphi = 2\pi p$, avec $p \geq 0$ par convention, en fonction de A, L, Λ, T_∞ et T .

3.3.3. Exprimer l'ordre d'interférence p_s au niveau du plan de la plaque $\mathcal{P}$.

3.3.4. Montrer que la température T_p correspondant à la frange d'interférence d'ordre p est donnée par la relation :

$$T_p = \frac{T_\infty}{1 - \frac{p}{p_s} \left(1 - \frac{T_\infty}{T_s}\right)} \quad (9)$$

3.4. La figure 5 représente la partie centrale de l'interférogramme montrant l'ensemble de toutes les franges d'interférence obtenues. La partie du champ d'interférence ainsi montrée couvre l'ensemble des variations de température allant de T_s à T_∞ .

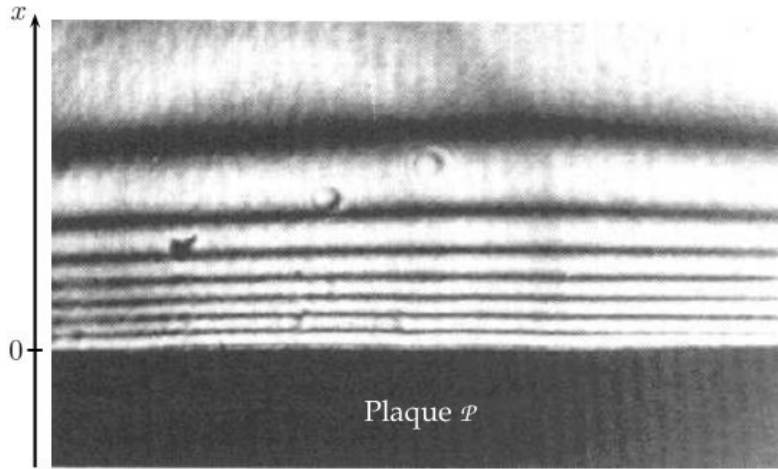


Figure 5: Région centrale de l'interférogramme.

Cet interférogramme a été enregistré à l'aide d'une caméra numérique à dispositif de transfert de charge DTC (ou CCD pour Charge Coupled Device). La matrice active de cette caméra est composée de 256×256 éléments photosensibles (ou pixel pour Picture Element). Chaque pixel est un carré de côté $303,5 \mu\text{m}$. La figure 6 donne la variation de l'intensité des pixels, sur une échelle de 0 à 255, dans la direction Ox perpendiculaire à la plaque $\mathcal{P}$.

3.4.1. Montrer que l'ordre d'interférence p est maximal au niveau du plan de la plaque $\mathcal{P}$. On rappelle que, par convention, p a été défini positif.

3.4.2. Déterminer les valeurs numériques de l'ordre d'interférence de toutes les franges sombres qui apparaissent sur l'interférogramme.

3.4.3. En déduire les valeurs numériques de la température des surfaces isothermes correspondantes. On présentera les résultats sous forme d'un tableau à deux lignes (x_p, T_p) donnant la distance x_p de la surface isotherme p par rapport à la surface de la plaque $\mathcal{P}$ ainsi que sa température T_p . On admettra, qu'en très bonne approximation, l'ordre d'interférence p est entier en $x = 0$ et on rappelle la correspondance : 1 pixel $\leftrightarrow 303,5 \mu\text{m}$.

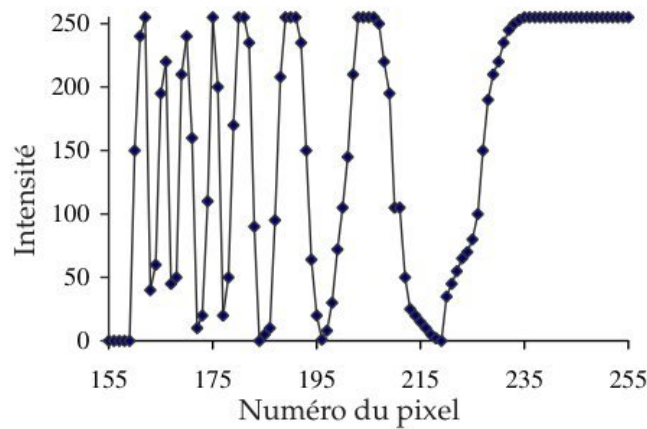


Figure 6: Variation de l'intensité des pixels dans la direction Ox perpendiculaire à la plaque $\mathcal{P}$. Le pixel n°159 correspond à la surface de la plaque.

3.5. On se propose de vérifier que le profil de température au dessus de la plaque $\mathcal{P}$ peut être décrit par une loi du type :

$$T(x) = \alpha + \beta \exp -k x \quad (10)$$

où α , β et k sont trois constantes positives.

3.5.1. Exprimer α et β en fonction de T_s et T_∞ .

3.5.2. Vérifier, à l'aide d'une représentation graphique adéquate par exemple, que les données expérimentales déduites de la question 3.4.3. peuvent être bien représentées par la loi (10) et en déduire la valeur de la constante k .

3.5.3. Montrer que le flux thermique Φ dans l'air à la surface de la plaque satisfait à la loi de NEWTON et en déduire l'expression du coefficient de transfert conducto-convectif h_{cc} en fonction de la constante k et de la conductivité thermique λ_a de l'air.

3.5.4. Déterminer la valeur numérique du coefficient de transfert conducto-convectif de cette plaque en acier placée dans l'air au repos.

FIN DE L'ÉPREUVE