- *On veillera à une présentation et une rédaction claires et soignées des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.*
- *Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant clairement les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*
- *Toutes les réponses devront être très soigneusement justifiées.*
- *Si un résultat donné par l'énoncé est non démontré, il peut néanmoins être admis pour les questions suivantes. Ainsi, les diverses parties de l'épreuve sont relativement indépendantes entre elles.*

Mission BepiColombo

De par sa position relativement basse par rapport à l'horizon, et bien que visible, Mercure reste la plus mystérieuse des planètes telluriques. Son orbite particulière et sa petite dimension rendent son observation difficile. Malgré deux grandes missions déjà réalisées par Mariner 10 (dans les années 1970) et Messenger (dans les années 2000), qui ont permis d'apporter de nombreuses observations sur sa surface, certaines caractéristiques de Mercure demeurent encore inconnues.

La mission BepiColombo (figure 1), appelée ainsi en hommage au mathématicien italien G. COLOMBO qui calcula la trajectoire de la sonde Mariner 10, est la cinquième pierre angulaire du programme Cosmic Vision de l'ESA (European Space Agency) en coopération avec le JAXA (Japan Aerospace Exploration Agency). Elle permettra l'étude de la planète Mercure et de son environnement grâce à deux sondes, MMO (Mercury Magnetospheric Orbiter) et MPO (Mercury Polar Orbiter), mises en orbite autour de la planète.

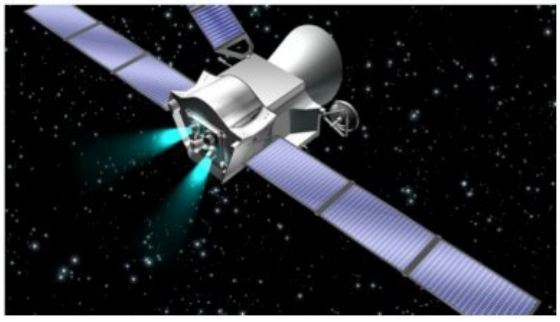

Figure 1 : Illustration d'artiste de la sonde BepiColombo, propulsé par deux moteurs ioniques.

Lancée le 19 octobre 2018 par le lanceur Européen Ariane 5, la sonde arriverait autour de Mercure en 2025. La sonde MPO, sur une trajectoire circulaire, étudiera la surface et l'intérieur de la planète ainsi que l'exosphère. La sonde MMO, sur une trajectoire elliptique, sera dédiée à l'étude de la magnétosphère et de l'exosphère.

Ce problème propose d'étudier de manière simplifiée quelques aspects relatifs à la mission BepiColombo.

La partie 1 est notée sur ***4 points***, la partie 2 sur ***16 points***.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/1701 - Wadifa Info - page 1/8

Partie 1

Mouvement dans le champ gravitationnel d'une planète

On assimile une planète à une distribution de masse sphérique homogène de centre O_P, de rayon R_P et de masse M_P répartie uniformément en volume.

On se place dans le référentiel $(\Re_P)$, d'origine O_P et en translation par rapport au référentiel de Copernic. On suppose $(\Re_P)$ galiléen et on ne tiendra compte que de l'attraction de la planète.

1. En justifiant soigneusement, montrer que le champ gravitationnel $\vec{\mathcal{G}}(M)$ créé par cette distribution en tout point M de l'espace repéré par ses coordonnées sphériques (r,θ,φ) est donné par :

$$\vec{\mathcal{G}}(M) = -G\frac{M_{\text{int}}(r)}{r^2}\vec{e}_r$$

où G est la constante de gravitation universelle et $M_{\text{int}}(r)$ la masse qui se trouve à l'intérieur de la sphère de centre O_P et de rayon r. $\vec{e}_r$ est un vecteur unitaire de la base $\left(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi\right)$ associée à ces coordonnées sphériques.

2. Achever la détermination de l'expression du champ gravitationnel $\vec{\mathcal{G}}(M)$ créé par la planète au point M de l'espace.

On affecte le point M, situé à la distance r $(r > R_P)$ du centre O_P, d'une masse m que l'on assimile à un point matériel.

3. Exprimer vectoriellement la force $\vec{F}$ exercée par la planète sur le point matériel M.

4. La seule force $\vec{F}$ qui s'exerce sur M est une force dite centrale. Justifier l'appellation. Quelle en est la conséquence sur la trajectoire du point M ? Préciser la surface dans laquelle se fait le mouvement.

5. Montrer que la force $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle gravitationnelle E_p dont on donnera l'expression en fonction de G, M_P, m et r. On prendra l'énergie potentielle gravitationnelle nulle quand le point matériel est infiniment éloigné de la planète.

6. Établir l'expression générale de l'énergie mécanique E_m du point M en fonction de G, M_P, m et r et de la vitesse v de M dans $(\Re_P)$.

7. En déduire la vitesse de libération (ou vitesse d'« évasion ») du point M à la surface de la planète.

On considère que le point matériel M est en orbite circulaire de centre O_P, de rayon r_0 et qu'il effectue un tour complet de la planète en une durée T_0.

8. Montrer que le mouvement circulaire de M est nécessairement uniforme.

9. Établir l'expression littérale de la vitesse v_0 de M en fonction de M_P, r_0 et G. Retrouver la troisième loi de Kepler.

10. Exprimer l'énergie cinétique E_{c0} de M en fonction de G, M_P, m et r_0.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/1701 - Wadifa Info - page 2/8

11. Déduire une relation entre l'énergie potentielle de gravitation E_{p0} et E_{c0}, et une autre entre l'énergie mécanique E_{m0} de M et E_{c0}. Commenter le signe de E_{m0}.

Partie 2
Mission BepiColombo

1. Caractéristiques d'une trajectoire elliptique

On considère que le point matériel M de masse m est en orbite elliptique dont la planète de centre O_P est un foyer et qu'il effectue un tour complet de la planète en une durée T. L'équation de la trajectoire elliptique du point matériel soumis à la seule force de gravitation exercée par la planète est donnée dans le cas général par :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta)}$$

Le centre O_P est l'origine des coordonnées polaires adoptées pour décrire le mouvement de M ; p et e sont respectivement le paramètre et l'excentricité de l'ellipse.

1.1. Réaliser un schéma de la trajectoire de M autour de la planète et y faire figurer r, θ, le centre O_P, le péricentre P_P et l'apocentre A_P. Préciser, sur ce schéma, le demi-grand axe de l'ellipse noté a, les vecteurs vitesses $\vec{v}_{P_P}$ et $\vec{v}_{A_P}$ de M respectivement en P_P et A_P ainsi que les positions respectives r_{P_P} et r_{A_P} de M par rapport à O_P.

1.2. Établir une relation entre les grandeurs v_{P_P}, v_{A_P}, r_{P_P} et r_{A_P}.

1.3. Déterminer r_{P_P} et r_{A_P} en fonction de p et e.

1.4. En considérant l'expression de l'énergie mécanique de M en P_P et A_P montrer que $E_{me} = -\frac{GmM_P}{2a}$.

1.5. Déduire de ce qui précède les vitesses v_{P_P} et v_{A_P} du point matériel respectivement au péricentre et à l'apocentre de la trajectoire elliptique.

2. Voyage interplanétaire de BepiColombo

On se propose de faire l'étude de l'envoi du vaisseau BepiColombo sur Mercure. Afin de simplifier les calculs, on fait les hypothèses suivantes :

- On assimile le vaisseau à un point matériel de masse m ;
- On considère que Mercure et la Terre décrivent autour du Soleil des trajectoires circulaires respectivement de rayon $r_M = 46.10^6\,km$ et de rayon $r_T = 152.10^6\,km$.
- Pour étudier simplement une trajectoire entre deux planètes, on admet qu'il existe autour de chaque planète (ici la Terre puis Mercure) une zone d'influence gravitationnelle où la seule attraction gravitationnelle à prendre en compte est celle de la planète. Lorsque le vaisseau quitte la zone d'influence d'une planète, on suppose qu'il subit uniquement l'attraction gravitationnelle du Soleil.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/1701 - Wadifa Info - page 3/8

Pour aller de la Terre à Mercure, la solution la plus économique (en termes de carburant) est donnée par l'orbite de HOHMANN. Cette ellipse de transfert, dont le Soleil est un foyer, est tangente en son aphélie A à l'orbite de la Terre et en son périhélie P à l'orbite de Mercure. On la considère coplanaire aux trajectoires circulaires de la Terre et de Mercure autour du Soleil. Cette solution implique deux impulsions instantanées ou presque (grâce à des moteurs qui fournissent une grande poussée très rapidement) qui se traduisent en des variations de vitesse Δv_A et Δv_P pour d'abord quitter l'orbite terrestre et ensuite injecter le vaisseau dans l'orbite mercurienne.

Pour l'étude de l'ellipse de transfert, on considère le vaisseau sur une orbite d'attente circulaire basse au voisinage de la Terre. On se place dans le référentiel héliocentrique $(\mathfrak{R}_H)$ supposé galiléen et on ne tient compte que de l'attraction gravitationnelle du Soleil.

2.1. Définir le référentiel héliocentrique. À quelle(s) condition(s) peut-on le considérer galiléen ?

2.2. Réaliser un schéma de la trajectoire du vaisseau autour du Soleil et y faire figurer les trajectoires de la Terre et de Mercure autour du Soleil.

2.3. Exprimer la vitesse $v(r)$ du vaisseau spatial placé sur une orbite de demi-grand axe a autour du Soleil en fonction de sa distance r au centre du Soleil.

2.4. Expliquer en quelques mots pourquoi il est plus économique de choisir une orbite de HOHMANN plutôt qu'une orbite de transfert sécante à l'orbite de Mercure.

2.5. À quelles distances du Soleil, notées $d_{H,P}$ et $d_{H,A}$, se trouvent respectivement le périhélie et l'aphélie de l'orbite de transfert de HOHMANN entre la Terre et Mercure ? Calculer le demi-grand axe a_H, ainsi que l'excentricité e_H de l'ellipse de HOHMANN.

2.6. Deux impulsions sont nécessaires pour effectuer le transfert d'orbites. Une première impulsion au point A engendre une variation de vitesse $\Delta v_A = v_{H,A} - v_T$. Ceci permet au vaisseau de passer de sa trajectoire circulaire initiale à l'ellipse de HOHMANN. Une seconde impulsion, associée à une variation de vitesse $\Delta v_P = v_M - v_{H,P}$ au point P permet au vaisseau de passer de l'orbite de HOHMANN vers l'orbite de Mercure. v_T, v_M, $v_{H,A}$ et $v_{H,P}$ sont les vitesse respectivement sur l'orbite de la Terre, l'orbite de Mercure, à l'aphélie et au périhélie de l'orbite de HOHMANN.

Montrer que les expressions de Δv_A et de Δv_P sont données par :

$$\Delta v_A = \sqrt{\frac{GM_S}{r_T}}\left(\sqrt{\frac{r_{P_M}}{a}} - 1\right) \text{ et } \Delta v_P = \sqrt{\frac{GM_S}{r_M}}\left(1 - \sqrt{\frac{r_{A_M}}{a}}\right)$$

2.7. Exprimer et calculer la durée théorique (en jours) du transfert $\Delta t_{A\to P}$ de la Terre à Mercure (entre A et P). On pourra utiliser la troisième loi de Kepler.

2.8. La croisière BepiColombo est longue (6 ans) car elle s'effectuera à l'aide de l'assistance gravitationnelle autour de la Terre, de Vénus et de Mercure. Expliquer en quelques mots ce qu'est l'assistance gravitationnelle et dire quel est son intérêt.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/1701 - Wadifa Info - page 4/8

3. Motorisation de la sonde BepiColombo

Afin d'optimiser au mieux la taille et le poids de la sonde BepiColombo, il a été décidé d'utiliser un moteur ionique (figure 2) fonctionnant grâce à l'ionisation du xénon gazeux par bombardement électronique dans la chambre du propulseur ionique. Les ions Xe^+ du xénon de charge q_i et de masse m_i pénètrent dans la chambre d'accélération en $x=0$, avec une vitesse que l'on considèrera nulle. Ils sont ensuite accélérés entre une grille intérieure (G_i) chargée positivement de potentiel $V_p=0$ et une grille extérieure (G_e) chargée négativement de potentiel $V_n=-U_0<0$ (figure 3). Les deux grilles distantes de d sont planes de surface S. Les ions sont caractérisés par la densité volumique $n_i(x)$, le potentiel électrique $V(x)$ et la vitesse $u_i(x)$ en x. La force d'accélération des ions à très haute vitesse est convertie en une force de poussée du vaisseau spatial donnée par : $\vec{F}=-D_m\vec{u_i}$. $\vec{u_i}$ est la vitesse d'éjection des ions en $x=d$ par rapport à la sonde et D_m est le débit massique de matière éjectée à travers la section S.

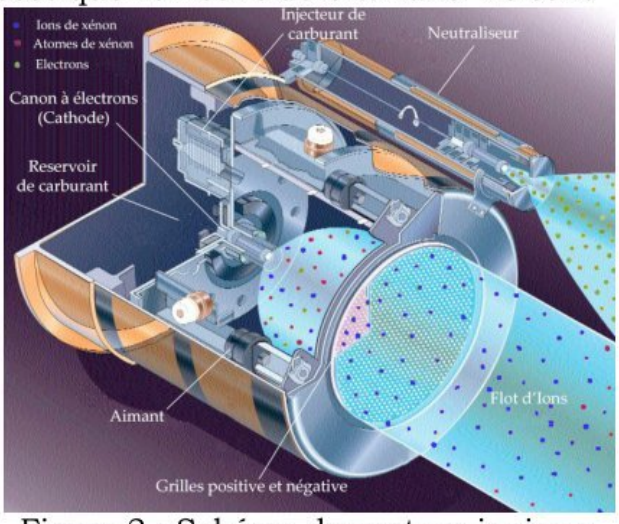

Figure 2 : Schéma du moteur ionique

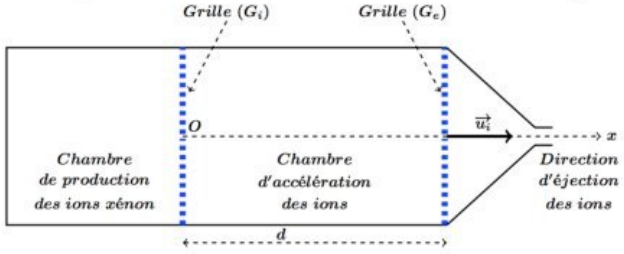

Figure 3 : Principe du moteur ionique

On se place dans le cadre de la mécanique non relativiste et on travaille dans un référentiel galiléen.

3.1. Vérifier l'homogénéité de l'expression de la force de poussée.

3.2. Établir l'expression de la vitesse $u_i(x)$ des ions à l'abscisse x.

3.3. Exprimer le débit massique D_m en fonction de $u_i(x)$, $n_i(x)$, m_i et S.

3.4. Justifier que $\dfrac{d^2V(x)}{dx^2}+\dfrac{n_i(x)q_i}{\varepsilon_0}=0$.

On souhaite déterminer des ordres de grandeurs des caractéristiques du moteur ionique. Pour cela, on suppose que le potentiel vérifie l'hypothèse : $\dfrac{d^2V(x)}{dx^2}\approx\dfrac{\Delta V}{(\Delta x)^2}\approx-\dfrac{U_0}{d^2}$.

3.5. En déduire l'expression du débit massique D_m en fonction de ε_0, U_0, q_i, m_i, d et S.

3.6. Exprimer $F=\left\|\vec{F}\right\|$ en fonction de ε_0, U_0, d et S.

3.7. En négligeant la force de pesanteur et la force de frottement due à l'atmosphère, montrer que la puissance électrique minimale que doit fournir le générateur est donnée par :

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/1701 - Wadifa Info - page 5/8

$$P_{em} = \frac{\varepsilon_0 S U_0^{5/2}}{d^2}\sqrt{\frac{2q_i}{m_i}}$$

3.8. Le césium ou du sodium, qui étaient également des carburants potentiels pour les moteurs ioniques, n'ont plus cet avantage. Ils ont été remplacés par le xénon. Expliquer pourquoi.

3.9. À la sortie de la chambre d'accélération, un canon à électrons extérieur appelé neutraliseur, transforme les ions xénon en atomes de xénon. Expliquer pourquoi le gaz éjecté doit être électriquement neutre.

4. Sonde MPO

4.1. Trajectoire

La sonde MPO (figure 4), assimilée à un point matériel de masse $m_{MPO} = 400kg$ et soumise uniquement à l'attraction de Mercure, décrit une trajectoire circulaire de rayon $r_{MPO} = 3,4.10^3 km$. Son mouvement est étudié dans le référentiel « mercurocentrique » que l'on suppose galiléen. On suppose que la planète Mercure est à répartition sphérique homogène de masse M_M, de centre O_M.



Figure 4 : Sonde MPO, vu d'artiste

4.1.1. En faisant l'analogie avec le référentiel géocentrique, définir le référentiel « mercurocentrique ».

4.1.2. Calculer la période de révolution T_{MPO} (en heure) de la sonde MPO autour de Mercure.

4.1.3. La sonde MPO est mise sur une orbite polaire, c'est-à-dire sur une orbite dont le plan contient l'axe polaire de Mercure. Quel est l'intérêt de cette situation pour cette sonde ?

4.1.4. Pourquoi à chaque révolution de la sonde, la zone de la surface de Mercure observée n'est pas la même ?

4.2. Télescope de Schmidt-Cassegrain, prise d'image

On étudie la prise de photographies numériques sur un capteur électronique photosensible par le télescope Schmidt-Cassegrain depuis la sonde. On se place dans le cadre de l'optique géométrique et de l'approximation de GAUSS. L'espace entre Mercure et la sonde sera considéré comme du vide pour le tracé des rayons lumineux.

4.2.1. Expliquer ce qu'est l'approximation de l'optique géométrique.

4.2.2. Quelles sont les conditions qui permettent de réaliser l'approximation de GAUSS ? Citer les conséquences de cette approximation sur le stigmatisme et l'aplanétisme.

4.2.3. Le télescope Schmidt-Cassegrain est un dispositif optique de type catadioptrique, composé de deux miroirs l'un sphérique, l'autre hyperbolique et d'une lentille, appelée lame de Schmidt, de correction des aberrations engendrées par le miroir primaire. On modélise le télescope Schmidt-Cassegrain embarqué dans la sonde par une lentille sphérique mince convergente ($\mathscr{L}$) de distance focale image $f' = 50mm$. La sonde à une orbite circulaire d'altitude moyenne $h_{MPO} = 950km$. L'atmosphère de Mercure, quasi inexistante, sera négligée pour la suite du problème.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/1701 - Wadifa Info - page 6/8

Parmi les nombreux instruments qui équiperont la sonde spatiale, on trouve un imageur spectrale dans l'infrarouge thermique fonctionnant en mode « push broom » (Figure 5). Les images réalisées par la sonde sont recueillies sur un capteur constitué d'une seule ligne de $N_p = 120$ pixels carrés, de taille $\delta = 35\mu m$ (Figure 6).

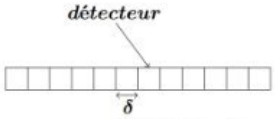

Figure 6

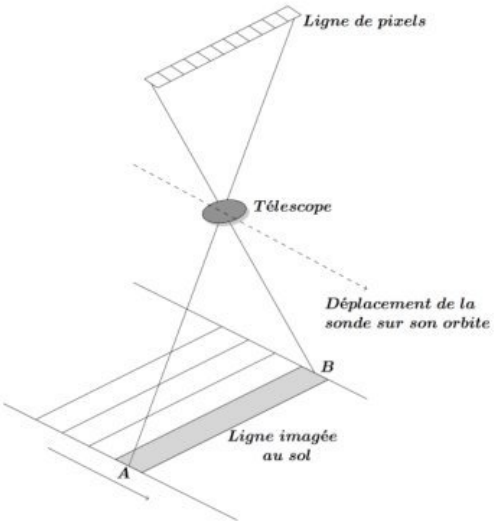

Figure 5 : Principe de l'imagerie par sonde « Push-broom »

4.2.3.1. De conception proche du télescope de type Cassegrain, le télescope Schmidt-Cassegrain présente toutefois quelques particularités notables. En citer deux.

4.2.3.2. Où doit-on placer le capteur ?

4.2.3.3. Dessiner le schéma des rayons lumineux donnant l'image de la ligne imagée à la surface de Mercure par le télescope.

4.2.3.4. Exprimer littéralement puis calculer numériquement les dimensions l et $L = AB$ de la ligne imagée rectangulaire à la surface de Mercure par la ligne de pixel.

4.2.3.5. Déterminer la résolution spatiale du télescope, définie par la dimension du plus petit objet sur Mercure détectable.

4.2.4. La surface de mercure est considérée comme un corps à la température $T = 440K$ pour une longueur d'onde centrale de détection $\lambda_0 = 10\mu m$.

4.2.4.1. Le rayonnement émis par la planète Mercure vérifie-t-il la loi de Wien ?

4.2.4.2. Sachant que le mouvement de la sonde BepiColombo sur son orbite entraîne un déplacement de la ligne de vue à une vitesse $v = 2,6km.s^{-1}$, calculer le temps τ durant lequel est vue une zone donnée de la surface par un pixel.

4.2.4.3. On estime que la puissance Φ_{px} reçu par un pixel au centre du détecteur observant la surface de Mercure dans la bande spectrale du détecteur est $\Phi_{px} = 510pW$. Calculer le nombre N_{photon} de photons reçus par un pixel provenant d'une zone donnée de la surface de Mercure.

Données :

- Masse de la planète Mercure : $M_M = 3,30.10^{23}kg$.
- Rayon de la planète Mercure : $R_M = 2,44.10^3km$.
- Masse de la planète Terre : $M_T = 6,0.10^{24}kg$.
- Rayon de la planète Terre : $R_T = 6,4.10^3km$.
- Masse du Soleil : $M_S = 1,9.10^{30}kg$.
- Constante de gravitation universelle : $G = 6,7.10^{-11}SI$.
- Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3.10^8\ m.s^{-1}$.
- Constante de Planck : $h = 6,63.10^{-34}\ J.s$.

wadifa-info.com نماذج المباريات من موقع وظيفة إنفو

Source: www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/1701 - Wadifa Info - page 7/8

Wadifa Info

www.wadifa-info.com

Le sujet suivant à préparer — **النموذج التالي للتحضير**

نموذج مباراة ولوج سلك التكوين الأساسي - المدرسة الوطنية العليا للإدارة - دورة 26 نونبر 2016 -

Modèle de concours d'accès au cycle de formation initiale – École Nationale Supérieure de l'Administration – 26 novembre

www.wadifa-info.com/fr/modele-concours/640

Chaîne WhatsApp — **قناة واتساب**

المباريات الجديدة والنتائج كل يوم

Nouveaux concours et résultats chaque jour

wadifa-info.com/wa

Chaîne YouTube — **قناة يوتيوب**

امتحانات تجريبية بالتصحيح، بالدارجة

Examens blancs corrigés, expliqués en darija

youtube.com/@wadifainfo

Envoyer à un ami — **أرسل النموذج لصديق**

شارك هذا النموذج على واتساب مع من يحضّر معك

Partagez ce sujet sur WhatsApp

wa.me